FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN FÍSICAS
CURSO CERO

TÍTULO: ***Sistemas modelo: El péndulo simple.***

OBJETIVOS:

- Mostrar la semejanza entre el movimiento del péndulo simple y el movimiento vibratorio armónico.
- Mostrar el esquema de las fuerzas que actúan sobre la lenteja de un péndulo simple.
- Ilustrar como se aplican los conceptos de trabajo y energía en el péndulo simple.

DESARROLLO CONCEPTUAL

CONCEPTOS GENERALES

Péndulo simple: Es un sistema formado por una masa puntual (de pequeño tamaño) unida a una cuerda inextensible y sin masa de longitud ℓ, la cual está sujeta a un punto fijo por el otro extremo.
El movimiento natural de un péndulo simple es realizar oscilaciones de pequeña amplitud en torno a la posición de equilibrio de la lenteja, que es aquélla en la que la lenteja se encuentra en la vertical del punto de suspensión de la cuerda.
Las fuerzas que actúan sobre la lenteja son el peso de la misma y la tensión del hilo, la cual es perpendicular al movimiento de la lenteja y, por lo tanto, no realiza trabajo mecánico.

FORMULACIÓN SIMPLE DEL PROBLEMA

¿Cómo es el movimiento de la lenteja del péndulo?
El esquema típico de un péndulo simple lo podemos ven en la Figura 1.

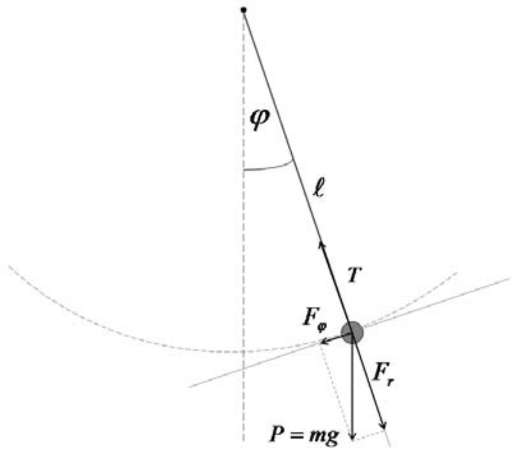

Figura 1.

Para analizar el movimiento del péndulo, lo primero es identificar las fuerzas que intervienen que, evidentemente son dos: el peso de la lenteja, que va en la dirección de la vertical del lugar, y la tensión del hilo, que actúa según la dirección del hilo en cada posición.
También en este caso, el sistema de fuerzas se puede estudiar en los ejes horizontal y vertical, pero dado que el movimiento se va a verificar en la dirección angular, lo más simple es analizar el balance de fuerzas en unos ejes paralelo (radial) y perpendicular al hilo (angular), tal como se indica en la figura 1. Recordemos que el ángulo que forman el peso y la dirección del hilo es igual al ángulo de desviación del hilo respecto a la vertical puesto que son ángulos correspondientes formados por dos rectas paralelas, el peso y la vertical del punto de suspensión, intersecadas por la dirección del hilo.
Para estudiar el movimiento de la lenteja basta con fijarse en la dirección "angular", puesto que en la dirección radial la tensión del hilo $\vec{T}$ tomará el valor necesario para que no se produzca desplazamiento radial de la lenteja. En la dirección "angular", solamente actúa la correspondiente proyección del peso, $F_\varphi = -mg\,\mathrm{sen}\varphi$, de manera que la aplicación de la **2ª Ley de Newton** nos dice que el producto de la masa por la componente "angular" de la aceleración será igual a la fuerza que actúa en dicha dirección. Teniendo en cuenta que la componente angular de la aceleración es $a_\varphi = \ell\alpha$, donde α es la aceleración angular, tendremos

$$ma_\varphi = m\ell\alpha = -mg\,\mathrm{sen}\varphi; \quad \text{es decir,} \quad \alpha = -\frac{g}{\ell}\mathrm{sen}\varphi$$

Si las oscilaciones son de pequeña amplitud ($\varphi << 1$), se puede sustituir el seno por el ángulo, con lo que obtenemos la ecuación de movimiento para el péndulo simple

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\varphi$$

Esta ecuación es análoga a la del movimiento de un oscilador armónico simple de masa m y constante recuperadora k

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Por lo tanto, el movimiento del péndulo será análogo al del oscilador armónico simple, es decir, realizará oscilaciones de pequeña amplitud en torno a su posición de equilibrio. Continuando con la analogía, podemos transponer la fórmula que nos da el periodo del oscilador al caso del péndulo, es decir si el periodo del oscilador es

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

el periodo del péndulo será

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Por lo tanto, podemos afirmar que el periodo de un péndulo simple depende únicamente de la longitud del mismo, y es mayor cuanto más largo sea el hilo del péndulo.

¿Cómo es el balance de energía en el movimiento del péndulo?
Vamos a aplicar el teorema de las fuerzas vivas a una situación como la de la Figura 1. Supongamos que en la posición inicial la lenteja se encuentra en reposo en una posición en la que la altura de la lenteja sobre la posición más baja de su trayectoria es h. Queremos hallar la velocidad v_2 de la lenteja cuando llega a dicha posición más baja. El teorema de las fuerzas vivas se expresa, entonces,

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2$$

El cálculo del trabajo mecánico se simplifica enormemente si nos damos cuenta de que la tensión del hilo es siempre perpendicular al desplazamiento; esto es así porque la lenteja describe una circunferencia de radio ℓ y centro en el punto de suspensión, y sabemos que el radio es siempre perpendicular a la circunferencia. En resumen, el trabajo producido por la tensión del hilo es nulo.
Por otra parte, sabemos que el peso es una fuerza conservativa, por lo tanto, su trabajo es igual a la diferencia de energía potencial entre los dos puntos considerados. Es decir, el teorema de las fuerzas vivas se expresa, entonces

$$W = mgh = \frac{1}{2} m v_2^2 , \quad \text{es decir} \quad v_2 = \sqrt{2gh}$$

Si recapitulamos la información que hemos obtenido, tenemos que, por un lado, todos los péndulos de la misma longitud tienen el mismo periodo, es decir, tardan el mismo tiempo en hacer una oscilación completa; por otro lado, podemos pensar que si, manteniéndonos dentro de la aproximación de pequeñas oscilaciones, colocamos la lenteja en posiciones iniciales distintas, en los experimentos en los que esa posición inicial esté más separada de la vertical, la lenteja tendrá que recorrer más espacio en el mismo tiempo, dado que el periodo está fijado por la longitud del hilo. Obviamente, la fórmula que hemos obtenido para la velocidad nos da la interpretación correcta: Si el péndulo se pone en movimiento desde una posición más alta, la oscilación tendrá mayor amplitud, pero se realiza en el mismo tiempo porque la lenteja se mueve más deprisa.

EJEMPLO

ENUNCIADO
Supongamos dos péndulos tales que uno tiene un periodo doble que el otro. Supongamos, también, que para ponerlos en movimiento la lenteja de los dos se desplaza un mismo ángulo φ respecto a la posición de equilibrio. ¿Cuál es la relación entre las velocidades de las respectivas lentejas en el punto más bajo de sus trayectorias?

RESOLUCIÓN
Para poder calcular la velocidad de la lenteja de cada péndulo necesitamos saber la altura a la que se ha situado la lenteja al desplazarlo el ángulo φ, para lo que, a su vez, necesitamos saber la longitud del péndulo, ya que $h = \ell - \ell \operatorname{sen}\varphi = \ell\left(1 - \operatorname{sen}\varphi\right)$.
Para calcular la longitud de los péndulos, en primer lugar fijaremos la notación y supondremos que el péndulo 1 tiene periodo $\tau_1 = \tau$ y el péndulo 2 tiene periodo $\tau_2 = 2\tau$. Ello implica que el péndulo 1 tiene longitud

$$\ell_1 = \frac{g\tau^2}{2\pi},$$

mientras que el péndulo 2 tendrá

$$\ell_2 = \frac{g4\tau^2}{2\pi} = \frac{2g\tau^2}{\pi}$$

Es decir, el péndulo 2 tiene una longitud 4 veces mayor que el péndulo 1. Por lo tanto, para el péndulo 1, la velocidad de la lenteja en el punto inferior de su trayectoria será

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2gl_1\left(1 - \operatorname{sen}\varphi\right)} = \sqrt{2g\frac{g\tau^2}{2\pi}\left(1 - \operatorname{sen}\varphi\right)} = g\tau\sqrt{\frac{1 - \operatorname{sen}\varphi}{\pi}},$$

mientras que para el péndulo 2, tendremos

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2gl_2\left(1-\operatorname{sen}\varphi\right)} = \sqrt{2g\frac{2g\tau^2}{\pi}\left(1-\operatorname{sen}\varphi\right)} = 2g\tau\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}\varphi}{\pi}}$$

Es decir, la velocidad de la lenteja del péndulo 2 cuando pasa por el punto más bajo de su trayectoria es el doble de la del péndulo 1.

EJERCICIO DE AUTOCOMPROBACIÓN

ENUNCIADO

Un péndulo cuyo periodo es 1 segundo en la Tierra es llevado por un astronauta a otro planeta donde la aceleración de la gravedad es la mitad que en la superficie terrestre. ¿Cuál es el periodo del péndulo en dicho planeta?

RESULTADO

$T = 1{,}41$ segundos.

REFERENCIAS:

- P. A. Tipler y G. Mosca, Física para la Ciencia y la Tecnología, 5ª Edición, Editorial Reverté, 2005.

AUTOR:

- Miguel Ángel Rubio Álvarez