Álgebra y Geometría

Prof. Elvira Hernández García
Departamento de Matemática Aplicada I
ETSI Industriales

Índice general

1. Introducción y objetivos

El Álgebra estudia estructuras, relaciones y cantidades y es una rama principal de las Matemáticas. La Geometría estudia abstracciones del espacio como son: puntos, rectas, planos, curvas, superficies, etc.

Los temas de este bloque, presentados de forma **esquemática** y **sintética**, son muy relevantes en el estudio de cualquier materia de primer curso de Escuelas de Ingeniería y Facultades de Ciencias. Dicho bloque pretende recopilar **de forma resumida** los principales conceptos y técnicas fundamentales del Álgebra Lineal Básica con el fin de proporcionar un material de apoyo para afrontar cualquier otro estudio superior de Álgebra. Los temas relativos a Geometría son muy puntuales y se pueden complementar con otros bloques.

Al final del bloque se presentan varios medios bibliográficos, considerados de fácil manejo para profundizar o ampliar los conceptos presentados y otros no señalados por problemas de espacio.

1.1. Objetivos

En este bloque de contenidos se pretende por un lado y de forma específica:

- promover la formación básica en álgebra lineal,
- reconocer y fijar los objetos algebraicos fundamentales,
- proporcionar algoritmos y métodos de resolución básicos,
- recordar ciertos conceptos geométricos,

y, por otro lado, de forma más general:

- familiarizar al estudiante con el lenguaje matemático y el aparato lógico-formal-deductivo,
- utilizar el formalismo matemático,
- adquirir fundamentos para enfrentarse al estudio de cualquier asignatura de matemáticas.

Versión: Octubre 2012.

Elvira Hernández García
ehernandez@ind.uned.es

2. Prueba de autodiagnóstico

Haga el test siguiente de Verdadero o Falso para saber el nivel de conocimientos que tiene en este bloque.

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 24 & 23 \\ 19 & 31 & 29 \end{pmatrix}$	**Verdadero**	**Falso**
Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden, entonces: $(A+B)^2 = A^2+B^2+2AB$	**Verdadero**	**Falso**
Siempre existe el determinante de una matriz	**Verdadero**	**Falso**
$\dfrac{x^2+4x+4}{x^2-4} = x-2$	**Verdadero**	**Falso**
El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 8 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ es 3	**Verdadero**	**Falso**
El sistema $x+y-z=1;\ x+2y-z=0;$ $x-y-z=1$ es compatible indeterminado	**Verdadero**	**Falso**
La ecuación $x^2+y^2+2x=4$ define una circunferencia	**Verdadero**	**Falso**
El vector $(-1,-2,-1)$ es perpendicular al plano definido por $x+2y+z=1$	**Verdadero**	**Falso**
$\dfrac{4x+4}{4x^2-36} + \dfrac{2}{2x-6} = \dfrac{2x+4}{(x-3)(x+3)}.$	**Verdadero**	**Falso**
$x^2-y^2=0$ define una hipérbola y $y^2=x$ una parábola	**Verdadero**	**Falso**

Si ha tenido muchas dificultades y el número de respuestas correctas no le parece aceptable, debe hacer de forma ordenada todas las fichas que encontrará a continuación. Si sólo ha tenido dificultades en algunos casos, localice las fichas correspondientes y repáselas. Si ha respondido todo correctamente puede pasar a otro bloque.

3. Contenidos

3.1. Ficha 1: Matrices

Definición Una matriz es un objeto de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

donde $m,\ n \in \mathbb{N}$ y a_{ij} son sus elementos. El orden (o dimensión) de la matriz A es $m \times n$. Posee m filas y n columnas. La columna $j-$ésima de A es $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$, y la fila $i-$ésima de A es $(a_{i1}, \dots, a_{in})$. De forma abreviada se denota $A = (a_{ij})$.
Si $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para todo $i,\ j$, entonces la matriz A se llama matriz real.
En este bloque siempre consideraremos matrices reales.

$\mathcal{M}_{m \times n}$ denota el conjunto de matrices (reales) de orden $m \times n$.

Tipos Si $n = m$ entonces A es una matriz cuadrada.

- La diagonal principal de A es $(a_{11}, \dots, a_{nn})$. La suma de los elementos de la diagonal se llama traza de A.
- Si los elementos debajo (resp. encima) de la diagonal principal son todos nulos, entonces A es triangular superior (resp. inferior).
- Si $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i,\ j$, entonces A es simétrica.
- Si $a_{ij} = -a_{ji}$ para todo $i,\ j$, entonces A es antisimétrica o hemisimétrica. (Nótese que debe ser $a_{ii} = 0,\ \forall i$).

- La matriz identidad de orden n, I_n, es una matriz cuadrada de orden n tal que los elementos de la diagonal principal son unos y el resto son ceros.
- La matriz nula de orden n, 0_n, es una matriz cuadrada de orden n tal que todos sus elementos son ceros.

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es escalonada por filas si el primer elemento no nulo de cada fila se encuentra a la derecha del primer elemento no nulo de la fila anterior y las filas nulas, si las hay, están al final.
La matriz escalonada **no es única**.
A es escalonada reducida si es escalonada y, además, en cada fila el primer elemento no nulo vale 1 y cumple que todos los elementos por debajo y por encima de él son ceros.
La matriz escalonada reducida es **única.**
De igual forma se puede definir la matriz escalonada y escalonada reducida por columnas.

Submatriz

Se dice que $B \in \mathcal{M}_{r\times s}$ es una submatriz de $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ siendo $r \leq m$ y $s \leq n$ si B se obtiene mediante la intersección de r filas de A y s columnas de A.

Operaciones

Si A, $B, \in \mathcal{M}_{m\times n}$, la matriz SUMA $C = A + B$ es de orden $m \times n$ y está definida por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ \ \forall i, j$.
PROPIEDADES: conmutativa, asociativa, elto. neutro y elto. opuesto.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$, la matriz PRODUCTO POR NÚMERO REAL $D = \lambda A$ es de orden $m \times n$ y está definida por $d_{ij} = \lambda a_{ij}\ \ \forall i, j$.
PROPIEDADES: distributiva respecto a la suma de matrices, distributiva respecto a la suma de reales, asociativa respecto a los reales y elemento unidad.
Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times r}$, la matriz PRODUCTO $P = AB$

es de orden $m \times r$ y sus elementos están definidos por

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

PROPIEDADES: asociativa, distributiva respecto a la suma de matrices y asociativa respecto al producto de un número real. Además, en el caso de matrices cuadradas ($n = m$) se cumple la propiedad elemento unidad.

Obsérvese que el producto de matrices NO cumple las propiedades conmutativa y elemento opuesto.

Traspuesta

Se llama matriz traspuesta de $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ a la matriz $A^t = (a'_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times m}$ tal que $a'_{ij} = a_{ji}$, es decir, la fila $i-$ésima de A^t es la columna $i-$ésima de A $\forall i$.
PROPIEDADES: $(A + B)^t = A^t + B^t$; $(AB)^t = B^t A^t$;
$((A)^t)^t = A$;
una matriz cuadrada A es simétrica si y sólo si $A = A^t$.

Operaciones elem.

Las siguientes operaciones en una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se llaman operaciones (o transformaciones) elementales por filas (resp. columnas):

1. Permutar dos filas (resp. columnas),
$$F_i \leftrightarrow F_j.$$
2. Multiplicar una fila (resp. columna) por un real no nulo
$$F_i \to \lambda F_i \text{ con } \lambda \neq 0.$$
3. Reemplazar una fila F_i (resp. columna) por la suma de ella más un múltiplo de otra λF_j, $F_i \to F_i + \lambda F_j$. De forma más general (considerando todas las m filas)
$$F_i \to F_i + \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{i-1} F_{i-1} + \lambda_{i+1} F_{i+1} + \cdots + \lambda_m F_m.$$

Estas operaciones elementales permiten de forma más sencilla: resolver sistemas de ecuaciones, calcular el rango y la matriz inversa (si existe) de una matriz.

Escalonar

Escalonar por filas una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ consiste en reducir A a una matriz escalonada por filas mediante operaciones elementales por filas.

Rango

El rango de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es un número natural, $\text{rang}(A)$, y es el número de filas (resp. columnas) NO nulas de la matriz que se obtiene al escalonar A por filas (resp. columnas).
El rango de una matriz también se calcula mediante el determinante (Ver Ficha Determinantes).
Las operaciones elementales por filas (resp. columnas) de una matriz A dejan invariante el rango de A.

M. Inversa

Se llama matriz inversa de una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, a la matriz A^{-1} tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$.
La matriz inversa NO siempre existe y si existe ésta es única.
Si A posee matriz inversa se llama regular. En caso contrario se llama singular.
Propiedades: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;$((A)^{-1})^{-1} = A$.
A^{-1} existe si y sólo si $\text{rang}(A) = n$. Para el cálculo de la matriz inversa ver la Ficha de Determinantes.

Ejemplo 1. Sea la matriz de orden 3×2 definida por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

entonces su matriz traspuesta A^t es de orden 2×3 y es:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2. Una empresa fabrica tres tipos de productos: A, B, y C. Se sabe que ha producido 23 unidades del producto A, 16 del producto B y 10 del producto C. Por otro lado, para fabricar un producto del tipo A se requieren 7 horas de trabajo, del tipo B 9 horas de trabajo y del tipo C 11 horas de trabajo. Calcular el coste total para manufacturar dichos productos sabiendo que el coste de cada unidad de producto es 45 euros y el coste de cada hora de trabajo 60 euros.

Es claro que:
el coste del producto A es: $23 \cdot 45 + 7 \cdot 60 = 1455$,
el coste del producto B es $16 \cdot 45 + 9 \cdot 60 = 1260$ y
el coste del producto C es: $10 \cdot 45 + 11 \cdot 60 = 1110$.
El coste total se puede representar por la matriz fila

$$\begin{pmatrix} 1455 & 1260 & 1110 \end{pmatrix}.$$

Si el coste de unidad de producto y de la hora de trabajo se representa por la matriz fila $\begin{pmatrix} 45 & 60 \end{pmatrix}$ resulta que el coste total pedido se puede calcular mediante el siguiente producto:
$\begin{pmatrix} 45 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 23 & 16 & 10 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 45 \cdot 23 + 60 \cdot 7 & 45 \cdot 16 + 60 \cdot 9 & 45 \cdot 10 + 60 \cdot 11 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1455 & 1260 & 1110 \end{pmatrix}$.
Nótese que este ejemplo ayuda a explicar la definición del producto de matrices.

Ejemplo 3. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, calcular A^{-1} si existe.

Si $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entonces A^{-1} debe cumplir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} a+2b & 4a+b \\ c+2d & 4c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualando los elementos que ocupan el mismo lugar resultan las siguientes igualdades:

$$a + 2b = 4c + d = 1 \quad \text{y} \quad 4a + b = c + 2d = 0.$$

Resolviendo se obtiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que también

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular $2A - B$, AB y BA.

Por definición:
$2A - B =$
$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 4-2 & 4-1 \\ 4-1 & 6-3 & 8-4 \\ 2-3 & 8-1 & 4-2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

Además $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 2+2+6 & 2+6+2 & 1+8+4 \\ 4+3+12 & 4+9+4 & 2+12+8 \\ 2+4+6 & 2+12+2 & 1+16+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 13 \\ 19 & 17 & 22 \\ 12 & 16 & 21 \end{pmatrix}$.

Análogamente se obtiene:

$$BA = \begin{pmatrix} 7 & 14 & 14 \\ 11 & 27 & 22 \\ 7 & 17 & 14 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que con este ejemplo se comprueba que el producto de matrices no es conmutativo.

Ejemplo 5. Escalonar por filas la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y calcular su rango.
Se trata de realizar operaciones elementales por filas de A para obtener una matriz escalonada.
Como a_{11} no es nulo, el primer paso es obtener $a_{21} = 0$ (un cero en la segunda fila). Para ello, por ejemplo, la segunda fila F_2 se sustituye por ella menos la tercera $F_2 \to F_2 - F_3$ y resulta: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. En el siguiente paso, hay que obtener $a_{31} = a_{32} = 0$ (dos ceros en la tercera fila). Para obtener $a_{31} = 0$, basta con sustituir la tercera fila por ella menos dos veces la primera, $F_3 \to F_3 - 2F_1$: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 \end{pmatrix}$. Para obtener $a_{32} = 0$, a la tercera fila obtenida se suma 6 veces la segunda fila, $F_3 \to F_3 + 6F_2$ y resulta una matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\text{rang}(A) = 3$.

Nótese que la matriz escalonada NO es única.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcular A^t y A^{-1} si existe.

Ejercicio 2. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Calcular AB, BA y $A - 3I_3$.

Ejercicio 3. Sean $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular $3A$ y BA.

Ejercicio 4. ¿Cuántas submatrices cuadradas tiene $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$?

Soluciones

Solución 1. Por definición: $A^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Para calcular la inversa de A, se supone que $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y se impone la condición de matriz inversa, es decir, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Después de hacer el producto de matrices e igualar elemento a elemento en la identidad anterior resulta:
$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$.

Solución 2. La matriz A tiene dimensión 3×2 y la matriz B 2×4. Por tanto no es posible realizar las operaciones: BA y $A-3I_3$.
La matriz AB de dimensión 3×4 es: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 4+3 & 2+5 & 2+2 \\ 1+3 & 2+9 & 1+15 & 1+6 \\ 3+4 & 6+12 & 3+20 & 3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 7 & 4 \\ 4 & 11 & 16 & 7 \\ 7 & 18 & 23 & 11 \end{pmatrix}.$$

Solución 3. La matriz A es cuadrada de orden 3. El producto $3A = \begin{pmatrix} 3\cdot 4 & 3\cdot 1 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 5 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 9 & 15 & 3 \end{pmatrix}$ y el producto BA, $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24+2+3 & 6+4+5 & 2+1 \\ 4+3+15 & 1+6+25 & 3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 15 & 3 \\ 22 & 32 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución 4. En total posee 9 submatrices cuadradas. Seis de orden 1 definidas cada una de ellas por cada elemento a_{ij} de A, es decir, (2), (1), (1), (2), (1), (4) y tres de orden 2: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

3.2. Ficha 2: Determinantes

Consideremos $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz cuadrada.
El determinante de una matriz A cuadrada es un número real y se denota por $|A|$.

Definición. $n \leq 3$ Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} \end{pmatrix}$ entonces $|A| = a_{11}$.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ entonces $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ entonces $|A|$ es:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}.$$

Adjunto Se llama adjunto de un elemento $a_{ij} \in A$ y se denota por A_{ij} al determinante de la matriz de orden $n-1$ que resulta de eliminar en A la fila i y columna j afectado del signo $+$ si $i+j$ es un número par o del signo $-$ si $i+j$ es impar.
Se llama matriz adjunta de A y se denota por $Adj(A)$ a la matriz que resulta al sustituir cada elemento a_{ij} por A_{ij}.

Definición El determinante de A desarrollado por la fila $i-$ésima es:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

El determinante de A se puede calcular de varias formas.

Propiedades Si A es una matriz cuadrada, se cumple:

- Si en A realizamos operaciones elementales por las filas o columnas (ver Ficha Matrices) el determinante de la matriz que resulta al hacer la nueva operación verifica las siguientes propiedades:

  - Si se realiza la operación elemental 1, el determinante es el mismo cambiado de signo.
  - Si se realiza la operación elemental 2, el determinante queda multiplicado por λ.
  - Si se realiza la operación elemental 3, el determinante es el mismo.
- Si A tiene alguna fila F_i tal que

$$F_i = \lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_{i-1} F_{i-1} + \lambda_{i+1} F_{i+1} + \cdots + \lambda_n F_n \quad (1)$$

con $\lambda_i \in \mathbb{R}$, entonces $|A| = 0$.
Si F_i cumple la expresión anterior (1) para ciertos λ_j se dice que la fila $i-$ésima es combinación del resto de filas.

Las propiedades anteriores son válidas si se reemplaza fila (F_i) por columna (C_i).

- $|A| = |A^t|, \quad |I_n| = 1$ y $|0_n| = 0$.
- Si $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $|AB| = |A||B|$ y $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

Aplicaciones El determinante es una herramienta útil para el cálculo de matriz inversa y rango de una matriz.

Matriz inversa La matriz A posee matriz inversa A^{-1} si y sólo si $|A| \neq 0$. Además

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t.$$

En particular como $AA^{-1} = I_n$, teniendo en cuenta las propiedades del determinante resulta

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

$\boxed{\text{Menor}}$ Se llama menor de A al determinante de una submatriz cuadrada de A. El orden de un menor es el orden de la submatriz asociada a dicho menor.

$\boxed{\text{Rango}}$ El rango de A, $\text{rang}(A)$, es el mayor de los órdenes de sus menores no nulos.
Teniendo en cuenta las propiedades del determinante:

- Para calcular el rango de un matriz se pueden eliminar la filas (resp. columnas) que son combinación del resto de filas (resp. columnas).
- El rango de una matriz no varía si se realizan transformaciones elementales entre sus filas o columnas.
- $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^t)$.

Nótese que el rango de una matriz no puede superar al número de filas o columnas que posee.

Ejemplo 6. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Entonces:
$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$,
$|B| = 1 \cdot 6 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 5 - 4 \cdot 6 \cdot 5 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 3 = 18 - 8 + 30 - 120 + 3 - 12 = -89$.

Ejemplo 7. Sean A y B matrices cuadradas de orden n. Calcular la matriz

$$(A - B)^2.$$

Aplicando las propiedades asociativa del producto de matrices resulta:
$(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = AA - AB - BA + BB = A^2 - AB - BA - B^2$.

Nótese que como el producto de matrices NO es conmutativo, en general, $AB \neq BA$ por tanto:

$$(A - B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2.$$

Ejemplo 8. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Calcular el determinante de A desarrollado por los adjuntos de la primera fila y su matriz inversa (si exíste).

Por definición, $|A| = 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$ $2(4) - 1(-17) - 1(10) = 8 + 17 - 10 = 15.$
Como el determinante de A es no nulo, 3 es el mayor de los órdenes de sus menores no nulos. Luego $\text{rang}(A) = 3$ y existe A^{-1}. Como,

$$A^{-1} = \frac{1}{15}[Adj(A)]^t,$$

sólo falta calcular la adjunta de A.
$Adj(A) = \begin{pmatrix} 10-6 & -(-5-12) & 2+8 \\ -(-5+2) & -10+4 & -(4-4) \\ 3-2 & -(6+1) & -4-1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 4 & 17 & 10 \\ 3 & -6 & 0 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}$. Entonces

$$[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 17 & -6 & -7 \\ 10 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{17}{15} & \frac{-2}{5} & \frac{-7}{15} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}.$$

Nótese que la matriz inversa de una matriz A si existe es única.

Ejemplo 9. Calcular el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

El rango es 3 porque el único menor de orden 3 es NO nulo ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 12 + 0 - 8 - 4 = 8.$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 5. Calcular las matrices inversas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 6. Calcular el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. Calcular el rango de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8. Sea A una matriz triangular superior de orden 3 cuyos elementos de la diagonal principal son no nulos. ¿Podemos asegurar que existe A^{-1}?

Soluciones

Solución 5. Como $|A| = 3$ se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{3}[Adj(A)]^t.$$

La matriz adjunta de A es

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -6 & -3 & 6 \\ 9 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & 2 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

Sin embargo B^{-1} no existe porque $|B| = 0$.

Solución 6. El determinante de A desarrollado por los adjuntos de la segunda fila es

$$0(-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Luego
$$|A| = 0 + 92 - 24 - 10 = 58.$$

Solución 7. El rango es 2. Como la primera y segunda fila son iguales, se puede eliminar una de ellas.
Además, la tercera fila $F_3 = \frac{-1}{3}F_1 + \frac{1}{3}F_4$, es decir, la F_3 es combinación del resto de filas. Por tanto, también se puede eliminar F_3. Entonces, de acuerdo con las propiedades de los rangos:

$$\text{rang}(A) = \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} =$$

$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} = 2$. Utilizando menores de orden 2 de la matriz anterior, se obtiene que $\text{rang}(A) = 2$.
Compruébese que todos los menores posibles de orden 3 de la matriz inicial son nulos.

Solución 8. Sí porque su determinante es no nulo ya que el determinante de una matriz triangular se obtiene multiplicando loa elementos de la diagonal principal.

3.3. Ficha 3: Polinomios

$\boxed{\text{Definición}}$ Un polinomio de coeficientes reales $P(x)$ de grado n en x es una expresión de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

siendo $a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$. Los elementos a_i se llaman coeficientes de $P(x)$, los términos $a_i x^i$ se llaman monomios del polinomio y x es la variable del polinomio (a cada real $a \in \mathbb{R}$ le corresponde un valor $P(a)$).
Si el grado es 2, $n = 2$, el polinomio se llama cuadrático.

En particular, $a \in \mathbb{R}$ es un polinomio de grado 0.

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios en x.

$\boxed{\text{Operaciones}}$ El polinomio suma $P(x)+Q(x)$ y se obtiene sumando término a término los coeficientes de $P(x)$ y $Q(x)$. El producto de polinomios $P(x) \cdot Q(x)$ se obtiene al sumar los productos de cada término de $P(x)$ por todos los términos de $Q(x)$.
El cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se obtiene aplicando el algoritmo de la división.
Recuérdese que el método de Ruffini permite calcular el cociente y el resto de la división del polinomio $P(x)$ y $(x - \alpha)$ siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nótese que $P(x) = Q(x)$ si y sólo si son iguales monomio a monomio.

$\boxed{\text{Raíz}}$ Se dice que $a \in \mathbb{R}$ es una raíz real de $P(x)$ si $P(a) = 0$.
Si a es una raíz de $P(x)$ entonces $P(x) = (x-a)Q(x)$ siendo $Q(x)$ el cociente de $P(x)$ y $(x - a)$.
El polinomio $(x - a)$ se llama factor lineal de $P(x)$.

Un polinomio de grado n tiene a lo más n raíces.
Raíces de un polinomio cuadrático: sea $ax^2 + bx + c = 0$, entonces sus raíces se calculan por la fórmula

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Recuérdese que si a, $b \in \mathbb{R}$ entonces $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ y $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Obsérvese que un polinomio $P(x)$ puede no tener raíces reales. Por ejemplo $x^2 + 1$.

Factorización Un polinomio $P(x)$ se llama reducible si se puede descomponer en producto de polinomios de grado menor que $P(x)$.

Factorizar un polinomio $P(x)$ consiste en expresar dicho polinomio $P(x)$ como producto de polinomios irreducibles.
Se puede factorizar un polinomio $P(x)$ a través de sus raíces.
(Un método de factorización es el Método de Ruffini).

Pol. Racionales Sean $P'(x)$ y $Q'(x)$ polinomios en x.
Operaciones.
Para realizar la suma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + \frac{P'(x)}{Q'(x)}$$

se reduce a común denominador.
Por otro lado, se cumple:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{P'(x)}{Q'(x)} = \frac{P(x) \cdot P'(x)}{Q(x) \cdot Q'(x)}$$

y

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{P'(x)}{Q'(x)} = \frac{P(x) \cdot Q'(x)}{Q(x) \cdot P'(x)}.$$

Ejemplo 10. Sean

$$P(x) = 2x - 1 \quad \text{y} \quad Q(x) = x^3 - 2x^2 - x - 2.$$

Calcular $P(x) \cdot Q(x)$, $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$, $3P(x)$ y $\frac{Q(x)}{P(x)}$.

Se verifica:
$P(x) \cdot Q(x) = (2x - 1)(x^3 - 2x^2 - x - 2) =$
$2x(x^3 - 2x^2 - x - 2) - 1(x^3 - 2x^2 - x - 2) =$
$2x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 4x - x^3 + 2x^2 + x + 2 = 2x^4 - 5x^3 - 3x + 2,$

$P(x) + Q(x) = 2x - 1 + x^3 - 2x^2 - x - 2 =$
$x^3 - 2x^2 + (2 - 1)x + (-1 - 2) = x^3 - 2x^2 + x - 3,$

$P(x) - Q(x) = 2x - 1 - (x^3 - 2x^2 - x - 2) =$
$-x^3 + 2x^2 + 3x + 1,$

$3P(x) = 6x^2 - 3.$
Por último, aplicado el algoritmo de la división resulta

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{x^3 - 2x^2 - x - 2}{2x - 1} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{8} - \frac{\frac{23}{8}}{2x - 1},$$

es decir, el cociente es

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}$$

y el resto es

$$-\frac{23}{8}.$$

Ejemplo 11. Calcular la suma de polinomios racionales

$$\frac{x-1}{(x-2)^2}+\frac{x+3}{x-1}.$$

Para sumar fracciones se reduce a común denominador, es decir, se hallan otras fracciones equivalentes a las originales de forma que tengan todas igual denominador.
Para ello, se calcula el mínimo común múltiplo de los denominadores que en este caso es

$$(x-2)^2(x-1).$$

Entonces se obtiene:

$$\frac{x-1}{(x-2)^2}+\frac{x+3}{x-1}=\frac{(x-1)(x-1)}{(x-2)^2(x-1)}+\frac{(x+3)(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}=$$

$$\frac{(x-1)^2+(x+3)(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)}.$$

Ejemplo 12. Simplificar

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-4} \quad \text{y} \quad \frac{x^3-4x^2+5x-2}{(x-1)^2}.$$

En primer lugar se comprueba si los polinomios numerador y denominador son reducibles. En efecto, se cumple que

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

luego

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-4}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-2}{x+2}.$$

Por otro lado,

$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2).$$

Entonces

$$\frac{x^3-4x^2+5x-2}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2(x-2)}{(x-1)^2}=x-2.$$

Ejemplo 13. Factorizar el polinomio cúbico $x^3 - 2x + 1$.

Utilizando el método de Ruffini se puede comprobar que 1 es una raíz. En efecto,

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & & & & \\ \hline & 1 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & 1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & -1 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto $x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2+x-1)$. Según el método de factorización de polinomios cuadráticos, las raíces del polinomio $x^2 + x - 1$ son

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2},$$

es decir, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Por consiguiente la factorización del polinomio dado es

$$(x-1)(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2})(x + \frac{1+\sqrt{5}}{2}).$$

Ejemplo 14. Expresar

$$\frac{x-5}{x^2-5x+6}$$

como suma de fracciones.

En primer lugar se debe expresar el denominador como producto de factores. Utilizando el método de factorización de polinomios cuadráticos se tiene que $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$. Por tanto podemos concluir:

$$\frac{x-5}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}$$

siendo A y B números reales. Para calcular el valor de A y B basta con establecer las igualdades que se obtienen al operar en ambos términos. Como

$$\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}=\frac{Ax+Bx-2A-3B}{x^2-5x+6}$$

se tiene que:

$$\frac{x-5}{x^2-5x+6}=\frac{Ax+Bx-2A-3B}{x^2-5x+6}=\frac{(A+B)x-2A-3B}{x^2-5x+6}.$$

Luego

$$(A+B)x-2A-3B=x-5,$$

es decir, $A+B=1$ y $-2A-3B=-5$.
Resolviendo se tiene $A=-2$ y $B=3$. Entonces se concluye:

$$\frac{x-5}{x^2-5x+6}=\frac{-2}{(x-3)}+\frac{3}{(x-2)}.$$

Ejemplo 15. Calcular

$$\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{(x+1)^2}{(x-1)^3} \quad \text{y} \quad \frac{x-4}{x-1}:\frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}.$$

Por definición de producto y división de polinomios resulta:

$$\frac{x-4}{x-1}\cdot\frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}=\frac{(x-4)(x+1)^2}{(x-1)(x-1)^3}=\frac{(x-4)(x+1)^2}{(x-1)^4}$$

$$\frac{x-4}{x-1}:\frac{(x+1)^2}{(x-1)^3}=\frac{(x-4)(x-1)^3}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{(x-4)(x-1)^2}{(x+1)^2}.$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 9. Calcular el grado de $2x^3+x^4-x+4-x^3-x(x^3-2)$.

Ejercicio 10. Factorizar x^2-a^2, $x^2+2ax+a^2$ y $x^2-2ax+a^2$.

Ejercicio 11. Calcular la suma

$$\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x-3}+\frac{2}{(x-2)^2}.$$

Ejercicio 12. Calcular la división

$$\frac{x^2-4x+5}{x-2}.$$

Ejercicio 13. Hallar las raíces de $x^4-3x^3-3x^2+11x-6$.

Soluciones

Solución 9. En primer lugar hay que simplificar el polinomio dado y reescribirlo de la forma general de un polinomio. Se cumple que

$$2x^3 + x^4 - x + 4 - x^3 - x(x^3 - 2) = x^3 + 2x.$$

Es decir, el grado es 3.

Solución 10. Se verifica que

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a),$$
$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

y

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2.$$

Solución 11. Reduciendo a común denominador se obtiene:

$$\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \frac{2}{(x-2)^2} =$$
$$\frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)^2(x-3)} + \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x-3)} + \frac{2(x-3)}{(x-2)^2(x-3)}$$

y operando resulta

$$\frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 2}{(x-2)^2(x-3)}.$$

Solución 12. Como $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$ se concluye que

$$\frac{x^2 - 4x + 5}{x-2} = \frac{(x-2)^2 + 1}{x-2} = \frac{(x-2)^2}{x-2} + \frac{1}{x-2} = x - 2 + \frac{1}{x-2}.$$

Solución 13. Las raíces son 3, 1 (doble) y -2. Por tanto

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = (x - 3)(x - 1)^2(x + 2).$$

3.4. Ficha 4: Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición Una ecuación lineal (real) con n incógnitas es una expresión de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

siendo $a_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$ y $b \in \mathbb{R}$. Los elementos x_i se llaman incógnitas y b término independiente.
Un sistema de m ecuaciones lineales (reales) y n incógnitas es un conjunto de m ecuaciones lineales (reales) de la forma:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{2}$$

siendo $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y $b_j \in \mathbb{R}$.

Solución Si existen números reales $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ tales que $x_i = \alpha_i$ para cada i, verifican las m ecuaciones lineales se dice que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ es una solución del sistema (2).
El sistema (2) puede tener solución (compatible) o puede no tener solución (incompatible).
Cuando existe solución sólo pueden suceder los casos siguientes:

- Existe una única solución. Compatible determinado.
- Existen infinitas soluciones. Compatible indeterminado.

El conjunto de todas las soluciones del sistema (2) se llama conjunto de soluciones del sistema.

S. Equivalentes El sistema (2) es equivalente a otro sistema de n incógnitas si ambos poseen el mismo conjunto solución.

Transf. posibles Denotamos por $\mathcal{E}_i$ la ecuación i-esima del sistema (2), es decir:

$$\mathcal{E}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

Las siguientes transformaciones entre las ecuaciones del sistema (2) proporcionan sistemas equivalentes a (2).

- Permutar ecuaciones del sistema, $\mathcal{E}_i \leftrightarrow \mathcal{E}_j$
- Multiplicar una ecuación por un número real no nulo, $\mathcal{E}_i \rightarrow \lambda\mathcal{E}_i$
- Reemplazar una ecuación por la suma de ella y una combinación del resto de ecuaciones,
$$\mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_i + \lambda_1\mathcal{E}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\mathcal{E}_{i-1} + \lambda_{i+1}\mathcal{E}_{i+1} + \cdots + \lambda_n\mathcal{E}_n.$$
- Eliminar una ecuación $\mathcal{E}_i$ que se obtiene mediante una combinación de las otras ecuaciones. Es decir, si $\mathcal{E}_i = \lambda_1\mathcal{E}_1 + \cdots + \lambda_{i-1}\mathcal{E}_{i-1} + \lambda_{i+1}\mathcal{E}_{i+1} + \cdots + \lambda_n\mathcal{E}_n$, entonces la ecuación $\mathcal{E}_i$ se llama redundante y se puede eliminar del sistema inicial.

M. Asociadas La matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ y la matriz de coeficientes ampliada $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$.

Clasificación Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*)$ es compatible (Teorema de Rouché-Fröbenius).
Si $\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A^*)$ es incompatible.
Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = n$ es compatible determinado.
Si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) < n$ es compatible indeterminado.

$\boxed{\text{Resolución}}$ Resolver un sistema es hallar su conjunto de soluciones. Existen varios métodos de resolución del sistema (2).

REDUCCIÓN. Se eliminan las ecuaciones lineales que se obtienen como suma de otras.

SUSTITUCIÓN. Se despeja una de las incógnitas en función de las otras y se sustituye su valor en las otras ecuaciones.

ELIMINACIÓN GAUSSIANA. Consiste en transformar el sistema dado en otro equivalente cuya matriz de coeficientes ampliada es escalonada.

Para obtener dicho sistema se escalona por filas la matriz de coeficientes ampliada A^*.

Nótese que escalarizar por filas la matriz A^* consiste en obtener un sistema equivalente al inicial teniendo en cuenta en qué consisten las transformaciones elementales de una matriz y las transformaciones posibles entre ecuaciones de un sistema.

El sistema obtenido es de tipo triangular y se resuelve fácilmente mediante sustituciones hacia atrás.

REGLA DE CRAMER. Si $n = m$ y $\text{rang}(A) = n$, entonces la solución del sistema (es única) se obtiene mediante la fórmula

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{1i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

para cada i.

Ejemplo 16. Clasificar y resolver sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} 2x & -3y & = & 5 \\ x & -y & = & 1 \end{array} \right.$$

por el método de sustitución.

La segunda ecuación del sistema es equivalente a $x = 1 + y$. Llevando esta relación a la primera ecuación resulta $2(1 + y) - 3y = 5$, es decir, $2 + (2 - 3)y = 5$. Entonces

$$y = \frac{3}{-1} = -3.$$

Teniendo en cuenta la primera ecuación resulta

$$x = 1 - 3 = -2.$$

En conclusión, el sistema dado es un sistema compatible determinado y la solución es

$$x = -2,\ y = -3.$$

Ejemplo 17. Resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{cccc} x & & -z & = & 2 \\ x & -y & +z & = & 1 \\ 3x & -y & -z & = & 5 \end{array}\right.$$

por reducción.

La tercera ecuación es redundante porque se obtiene sumando a la segunda dos veces la primera. Es decir, la ecuación $\mathcal{E}_3$ se obtiene realizando las operaciones $\mathcal{E}_2 + 2\mathcal{E}_1$.
Por tanto el sistema dado es equivalente al sistema de dos ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & & -z & = & 2 \\ x & -y & +z & = & 1 \end{array}\right.$$

En la expresión anterior (sustituyendo) resulta:

$$x = 2 + z;\ 2 + z - y + z = 1,$$

es decir,

$$x = 2 + z;\ y = 1 + 2z.$$

Entonces, el sistema es compatible e indeterminado y las soluciones dependen de un parámetro λ. El conjunto de soluciones es

$$x = 2 + \lambda,\ y = 1 + 2\lambda,\ z = \lambda$$

siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 18. Resolver sistema

$$\left\{\begin{array}{rrcl} ax & -3y & = & 5 \\ x & +y & = & 1 \end{array}\right.$$

según el valor del parámetro a.

Utilizaremos el Teorema de Rouché-Fröbenious.
Para ello se calcula el rango de la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $|A| = a + 3$ hay que diferenciar los casos en que $a = -3$ y $a \neq -3$.
Caso $a = -3$. Se tiene $\text{rang}(A) = 1$ y el rango de la matriz de coeficientes ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es 2 porque $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$
Por lo tanto, el sistema es incompatible si $a = -3$.
Caso $a \neq -3$. En este caso, el sistema es compatible determinado porque $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2$ y 2 es el número de incógnitas.

Ejemplo 19. Resolver el siguiente sistema mediante la regla de Cramer

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & +z & = & 1 \\ 2x & -y & +z & = & 0 \\ x & +2y & -z & = & 0 \end{array}\right.$$

En primer lugar comprobemos que se trata de un sistema compatible determinado. En efecto, ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

se cumple que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3$ y 3 es el número de incógnitas.
Aplicando la regla de Cramer resulta

$$x = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$y = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$z = \frac{1}{1}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 5.$$

La solución es $x = -1 \quad y = 3 \quad z = 5$.

Ejemplo 20. Resolver sistema $\left\{\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +z & = & 1 \\ x & & -z & = & 2 \\ 2x & +4y & & = & 3 \end{array}\right.$ por eliminación Gaussiana.

Se trata de escalonar la matriz de coeficientes ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar la segunda fila F_2 se cambia por ella menos la primera fila, es decir, $F_2 \to F_2 - F_1$ y resulta $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
A continuación, realizamos la trasformación $F_3 \to F_3 - 2F_2$ y se obtiene una matriz escalonada $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Entonces, el sistema dado es equivalente al sistema que tiene como matriz de coeficientes ampliada la matriz escalonada:

$$\begin{array}{rrrcl} x & +2y & +z & = & 1 \\ & -2y & -2z & = & 1 \\ & & -2z & = & 1 \end{array}.$$

El sistema anterior (de tipo triangular) se resuelve sustituyendo hacia atrás. Despejando z en la tercera ecuación resulta $z = -\frac{1}{2}$. Llevando este valor a la segunda ecuación se tiene $y = 0$. Sustituyendo los valores anteriores en la primera ecuación obtenemos $x = \frac{3}{2}$.

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 14. Clasificar y resolver el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & -y & -2z & = & 1 \\ x & & +z & = & 2 \\ x & -y & -z & = & 3 \end{array}\right. .$$

Ejercicio 15. ¿Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas homogéneo siempre es compatible determinado?

Ejercicio 16. Clasificar y resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} -x & & -z & = & 0 \\ -x & -2y & +2z & = & 0 \\ x & -y & +z & = & 0 \end{array}\right.$$

Ejercicio 17. Dado un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas. Decidir qué tipo de sistema puede ser y dar ejemplos.

Ejercicio 18. Clasificar y resolver

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} x & -y & -2z & = & 1 \\ 2x & -2y & +z & = & 0 \\ x & +y & -z & = & 0 \end{array}\right.$$

Soluciones

Solución 14. El rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ es 3 porque su determinante vale 2 luego el sistema es compatible determinado. Sustituyendo $x = 2 - z$ (segunda ecuación) resulta el sistema de dos incógnitas $2(2-z) - y - 2z = 1$ (primera ecuación) $(2 - z) - y - z = 3$ (tercera ecuación). Resolviendo se obtiene:

$$x = 0, \quad y = -5, \quad z = 2.$$

Solución 15. No. Un sistema (homogéneo o no homogéneo) puede tener ecuaciones redundantes y por tanto puede ser indeterminado.

Solución 16. Se trata de un sistema homogéneo luego es compatible porque siempre posee la solución nula. Además, es determinado porque el rango de la matriz de coeficientes es 3 ya que el determinante es no nulo (vale -3). Como la solución es única se concluye que es: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Solución 17. La matriz de coeficientes A es de dimensión 2×3 y la dimensión de la matriz ampliada A^* es 2×4. Entonces puede ser incompatible ($\text{rang}(A) = 1$ y $\text{rang}(A^*) = 2$) o compatible indeterminado ($\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 2$) pero nunca puede ser compatible determinado porque $\text{rang}(A) < 3$.

Solución 18. Sistema compatible determinado porque

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10.$$

Su única solución es:

$$x = \frac{-1}{10}, \quad y = \frac{-3}{10}, \quad z = \frac{-2}{5}.$$

3.5. Ficha 5: Vectores, Rectas y Planos

En términos generales, un vector en el espacio $\mathbb{R}^3$ (resp. en el plano $\mathbb{R}^2$) es una terna ordenada (resp. un par de ordenado) de números $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ (resp. $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$).
Si queremos precisar más, es necesario considerar el concepto de vector fijo y vector libre.
En esta ficha nos centraremos en vectores en el plano $\mathbb{R}^2$.

Vector Fijo

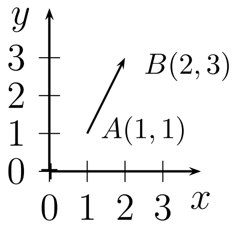
Un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ en $\mathbb{R}^2$ es un segmento orientado del plano que tiene como origen A y como extremo B. Si $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$.
El módulo de $\overrightarrow{AB}$ es la longitud de $\overrightarrow{AB}$,

$$|\overrightarrow{AB}| = +\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

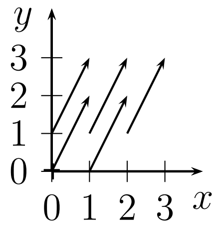
(también a este módulo se le llama distancia del punto A al punto B).
La dirección de $\overrightarrow{AB}$ es la dirección de la recta que lo contiene y el sentido de $\overrightarrow{AB}$ es el definido por B.

Vector Libre

Un vector libre es el conjunto de vectores del plano que posee el mismo módulo, dirección y sentido. Se trata de una clase de equivalencia de los vectores fijos con la misma dirección, módulo y sentido. Un representante de dicha clase se denota por $\bar{u}$.

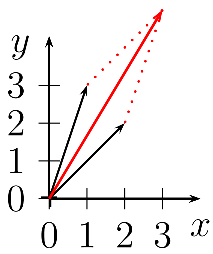


Vector Fijo $\overrightarrow{AB} = (1,2)$

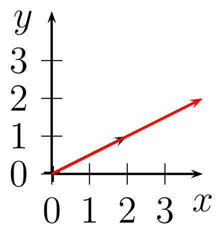


Algunos elementos del Vector libre $\bar{u}(1,2)$

$\boxed{\text{Operaciones}}$ Sean (u_1, u_2), $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ vectores del plano y un número real (o escalar) $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces $(u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$ y $\lambda(u_1, u_2) = (\lambda u_1, \lambda u_2)$.



Vector suma $(1,3) + (2,2) = (3,5)$
(regla del paralelogramo)



Vector producto $2(2,1) = (4,2)$

Análogamente, si (u_1, u_2, u_2), $(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$,
$(u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$
y si $\lambda \in \mathbb{R}$ (escalar)
$\lambda(u_1, u_2, u_3) = (\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3)$.

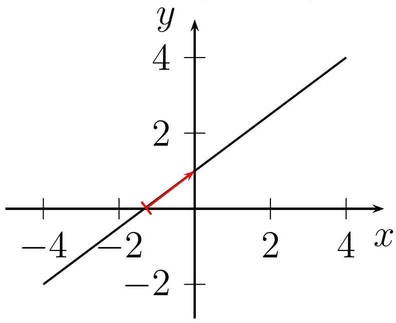
$\boxed{\text{Combinación lin.}}$ Se llama combinación lineal de los vectores $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$ de $\mathbb{R}^3$ al vector $\lambda_1 \bar{v}_1 + \cdots + \lambda_m \bar{v}_m$ siendo $\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$.
Si un vector del conjunto $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$ se puede obtener como combinación lineal del resto de vectores de $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$, entonces $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$ son linealmente dependientes.

Es caso contrario, se dice que $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m\}$ son linealmente independientes.

Recta en $\mathbb{R}^2$ Un recta r en el plano $\mathbb{R}^2$ está determinada por un punto $P(x_0, y_0)$ y un vector dirección $\bar{u}(u_1, u_2)$.
Los puntos (x, y) que pertenecen a una recta se pueden expresar de las siguientes formas equivalentes:
Vectorial: $(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda(u_1, u_2)$.
Paramétricas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_0 + \lambda u_1 \\ y & = & y_0 + \lambda u_2 \end{array}\right. \text{ siendo } \lambda \in \mathbb{R} \text{ el parámetro.}$$

Continua: $\frac{x-x_0}{u_1} = \frac{y-y_0}{u_2}$.
Cartesiana: $ax + by + c = 0$, que se obtiene operando en la anterior.
Explícita: $y = mx + n$, que se obtiene despejando y en la anterior. La pendiente de la recta r es m.
Punto-pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.



Recta de ecuación cartesiana $6x - 8y + 8 = 0$

Obsérvese que se puede obtener la ecuación cartesiana eliminando el parámetro de la expresión en paramétricas. Compruébese cómo se pasan de una expresión a otra cualquiera.

$\boxed{\text{Plano en } \mathbb{R}^3}$ Un plano π en el espacio $\mathbb{R}^3$ está determinado por un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ y dos vectores directores linealmente independientes $\bar{u}(u_1, u_2)$ y $\bar{v}(v_1, v_2)$.

Los puntos (x, y, z) que pertenecen al plano π se pueden expresar de las siguientes formas equivalentes:

Vectorial: $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$.

Paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y & = & y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z & = & z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{array} \right. \quad \text{siendo } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \text{ los parámetros.}$$

Cartesianas: $ax + by + cz + d = 0$ siendo a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. El vector $\bar{n}(a, b, c)$ es perpendicular al plano y se llama vector normal al plano.

Obsérvese que eliminando o añadiendo parámetros se puede pasar de la expresión paramétrica a la expresión cartesiana o viceversa.

$\boxed{\text{Posiciones}}$ Sean r y s dos rectas del plano $\mathbb{R}^2$ con pendientes m_r y m_s. Si $m_r = m_s$, son paralelas y si $m_r m_s = -1$, son perpendiculares entre sí.

Dos planos en el espacio pueden tener las siguientes posiciones: coincidentes, paralelos (el sistema de las ecuaciones dadas por cada plano es incompatible) o se cortan en una recta (el sistema de las ecuaciones dadas por cada plano es compatible indeterminado).

Ejemplo 21. Dados los vectores $A(2,4)$, $B(3,5)$ y $C(4,1)$. Calcular los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BC}$ y sus módulos.

Por definición:
$\overrightarrow{AB}(3-2, 5-4) = (1,1)$ y $|\overrightarrow{AB}| = +\sqrt{1^2+1^2} = +\sqrt{2}$,
$\overrightarrow{AC}(4-2, 1-4) = (2,-3)$ y $|\overrightarrow{AC}| = +\sqrt{2^2+(-3)^2} = +\sqrt{13}$,
$\overrightarrow{BC}(4-3, 1-5) = (1,-4)$ y $|\overrightarrow{BC}| = +\sqrt{1^2+(-4)^2} = +\sqrt{17}$.

Ejemplo 22. Sean los vectores $(1,4)$, $(2,3)$ y $(2,5)$. Calcular los vectores: $(1,4)+(2,3)$, $(2,3)+(2,5)$ y $3(2,3)$. Comprobar si los tres son linealmente dependientes y si $(1,4)$ y $(2,3)$ son linealmente independientes.

Se cumple:

$$(1,4)+(2,3)=(3,7),$$

$$(2,3)+(2,5)=(4,8)$$

y

$$3(2,3)=(6,9).$$

Los vectores dados son linealmente dependientes si uno de ellos, por ejemplo $(2,5)$ se puede escribir como combinación lineal del resto, es decir, si existen α, $\beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha(1,4)+\beta(2,3)=(2,5).$$

En efecto, resolviendo el sistema que resulta de la igualad anterior, $\alpha+2\beta=2$; $4\alpha+3\beta=5$ se obtiene:

$$\alpha=\frac{4}{5} \quad \text{y} \quad \beta=\frac{3}{5}.$$

Por tanto los tres vectores son linealmente dependientes.
Sin embargo $(1,4)$ y $(2,3)$ son linealmente independientes ya que la ecuación $(1,4)=\alpha(2,3)$ no tiene solución.

Ejemplo 23. Escribir las expresiones de la recta que pasa por $(1,3)$ y $(2,2)$ y obtener la recta perpendicular a ella que pasa por $(1,1)$.

Un vector dirección de la recta se obtiene restando dos puntos que pasan por ella, por ejemplo,:$(u_1, u_2) = (1,3) - (2,2) = (-1,1)$.
Expresión Vectorial:

$$(x, y) = (1,3) + \lambda(-1,1) \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Paramétrica:

$$x = 1 - \lambda,\ y = 3 + \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Continua:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{-1}.$$

Cartesiana:

$$y + x - 4 = 0.$$

Explícita:

$$y = 4 - x.$$

Punto pendiente:

$$y - 3 = -(x - 1).$$

Cualquier recta perpendicular a ella tiene como pendiente

$$m = -\frac{1}{-1} = 1$$

ya que -1 es la pendiente de r. Entonces la recta perpendicular a r que pasa por el punto $(1,1)$ tiene como expresión
$y - 1 = x - 1$ (en forma punto-pendiente).

Ejemplo 24. Sea el plano de ecuación vectorial $(x, y, z) = (1, 0, 1)+\lambda(1, 2, 3)+\mu(2, 0, 2)$. Escribir las distintas expresiones y hallar un vector normal al plano.
Paramétricas:

$$x = 1 + \lambda + 2\mu,\ y = 2\lambda,\ z = 1 + 3\lambda + 2\mu\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}.$$

Cartesianas: se obtienen eliminando los parámetros de la expresión paramétrica. En este caso, es fácil comprobar que

$$x + y = 1 + 3\lambda + 2\mu,$$

por tanto la expresión en cartesianas es: $x + y = z$ o equivalentemente

$$x + y - z = 0.$$

Un vector normal al plano es $(1, 1, -1)$ o cualquier múltiplo suyo $(2, 2, -2)$, $(-5, -5, 5)$,. . .
Nótese que un punto del plano queda determinado para un valor de λ y un valor de μ, por ejemplo, dos puntos del plano son: $(4, 2, 6)$ para $\lambda = 1$ y $\mu = 1$ y $(3, 0, 3)$ para $\lambda = 0$ y $\mu = 1$.

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 19. ¿Es el vector $(5, 8)$ combinación lineal de los vectores $(1, 1)$ y $(1, 2)$?

Ejercicio 20. Calcular el módulo del vector $(1, 2) + (3, 4)$.

Ejercicio 21. Calcular la pendiente de la recta $x = 2 + 3\lambda$, $y = 1 - \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 22. Calcular un vector normal del plano $x = 1 + 2\lambda$, $y = -3\mu$, $z = 2$ siendo λ, $\mu \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 23. Hallar el punto de corte de las rectas $x - y = 2$ y $2x - y = 4$.

Soluciones

Solución 19. Si porque $(5, 8) = 2(1, 1) + 3(1, 2)$.

Solución 20. El módulo del vector $(1, 2) + (3, 4) = (4, 6)$ vale $+\sqrt{4^2 + 6^2} = +\sqrt{52} = +2\sqrt{13}$.

Solución 21. La pendiente de una recta aparece en su expresión explícita. En este caso la ecuación dada es en forma paramétrica. Si se despeja el parámetro de ambas ecuaciones, $\lambda = \frac{x-2}{3}$ y $\lambda = -y + 1$ se obtiene la expresión continua:

$$\frac{x-2}{3} = 1 - y$$

y operando se deduce:

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

Entonces la pendiente de la recta dada es:

$$m = -\frac{1}{3}.$$

Solución 22. Un vector normal es cualquier múltiplo del vector $(0, 0, 1)$ ya que el plano dado tiene por ecuación cartesiana

$$z = 2$$

como se deduce de la ecuación en paramétricas dada.

Solución 23. El punto de corte es $(2, 0)$ debido a que $x = 2$, $y = 0$ es la solución del sistema

$$x - y = 2;\ 2x - y = 4.$$

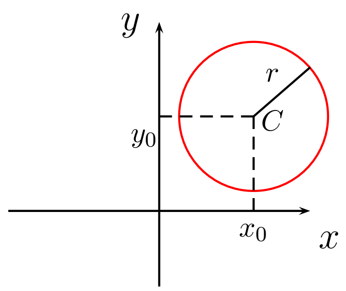
3.6. Ficha 6: Cónicas

Las cónicas son casos particulares de la siguiente ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

siendo x e y las variables y a, b, c, d, e, $f \in \mathbb{R}$. Sus puntos cumplen cierta propiedad geométrica en el plano $\mathbb{R}^2$. Estas curvas también se conocen con el nombre de secciones cónicas porque se obtienen al seccionar un cono con un plano.
Se clasifican en circunferencia, elipse, hipérbola y parábola.

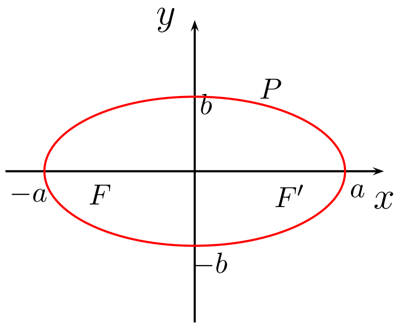
Circunferencia Una circunferencia es el conjunto de puntos $P(x, y)$ que equidistan $r > 0$ de un punto fijo $C(x_0, y_0)$ (centro).
Ecuación general: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.



Circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio r.

Elipse Una elipse es el conjunto de puntos $P(x, y)$ cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' (focos) es constante $|\overrightarrow{PF}| + |\overrightarrow{PF'}| = 2a$ $(a > 0)$.
Ecuación general con centro (x_0, y_0) *y focos* $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$ $(c > 0)$ siendo $a > 0$ el semieje mayor y $b > 0$ el semieje

menor:
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$
Se verifica $a^2=b^2+c^2$.

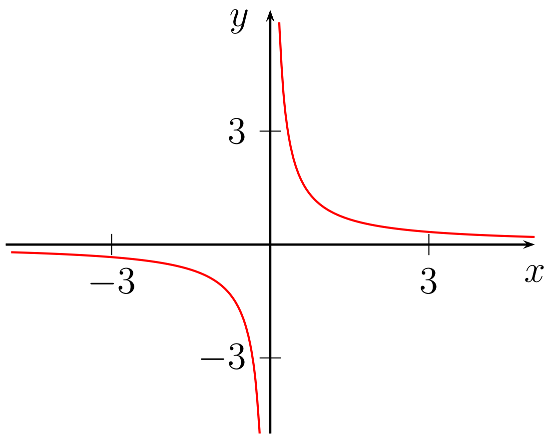


Elipse con centro $(0,0)$.

Nótese que la circunferencia es un caso particular de la elipse (cuando $a=b$).

$\boxed{\text{Hipérbola}}$ Una hipérbola es el conjunto de puntos $P(x,y)$ cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F y F' (focos) es constante $|\overrightarrow{PF}|-|\overrightarrow{PF'}|=\pm 2a$ $(a>0)$.
Ecuación general con centro(x_0,y_0) *y focos* $F(c,0)$ y $F'(-c,0)$ $(c>0)$:
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$
siendo $a>0$ el semieje mayor y $b>0$ el semieje menor. Se verifica que $c^2=a^2+b^2$.

La hipérbola posee dos asíntotas que son dos rectas simétricas que pasan por el centro (x_0,y_0).



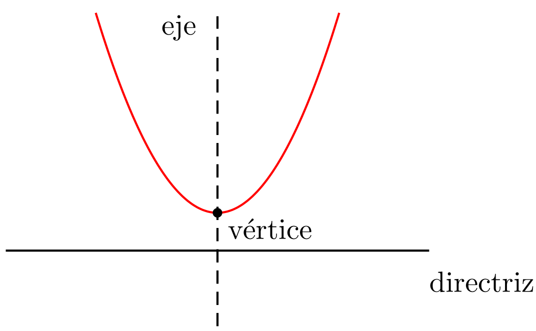
Hipérbola equilátera de ecuación $xy = 1$ referida respecto a sus asíntotas.

Una hipérbola es equilátera si $a = b$.

Parábola Una parábola es el conjunto de puntos $P(x, y)$, tales que equidistan de un punto fijo F (foco) y de una recta (directriz). El punto medio entre el foco y la directriz se llama vértice $V = (u, v)$.
La recta que pasa por el foco y el vértice se denomina eje de la parábola. La parábola es simétrica respecto a su eje.

Ecuación general con vértice $V = (u, v)$ y *directriz* $y = v - p$:

$$(x - u)^2 = 4p(y - v).$$



Parábola

Ejemplo 25. Clasificar la siguiente cónica

$$2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 10 = 0.$$

Desarrollando $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ resulta

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0.$$

Por otro lado la ecuación dada es equivalente a

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0.$$

Igualando ambas expresiones resulta $x_0 = 1$, $y_0 = -2$ y $r = \sqrt{10}$. Luego la cónica dada es una circunferencia de centro $(1, -2)$ y radio $\sqrt{10}$.

Ejemplo 26. Calcular los focos de la elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

El centro de la elipse es $(0, 0)$. Los focos F y F' están en el eje de abscisas por tanto son de la forma $F = (c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. Como $a = 3$ y $b = 2$ teniendo en cuenta que $a^2 = b^2 + c^2$ se obtiene:

$$c = \pm\sqrt{5}$$

y los focos son $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$.

Ejemplo 27. Calcular el eje y el vértice de la parábola $y = 2x^2 - 4$, o equivalentemente

$$\frac{1}{2}y = x^2 - 2.$$

Desarrollando la expresión de la parábola $(x-u)^2 = 4p(y-v)$ siendo (u, v) el vértice y $y = v - p$ la directriz resulta:

$$x^2 + u^2 - 2xu + 4pv = 4py.$$

Igualando, se obtiene

$$u = 0,\ 4p = \frac{1}{2},\ u^2 + 4pv = -2,$$

es decir, $u = 0$, $v = -4$ y $p = \frac{1}{8}$. Por tanto el vértice es $(0, -4)$, la directriz es $y = -4 - \frac{1}{8}$ y el eje de simetría es $x = 0$.

Ejemplo 28. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el punto $(1, 0)$ y que pasa por el punto $(4, 4)$.
Como el centro es $(1, 0)$ la circunferencia pedida es de la forma

$$(x-1)^2 + y^2 = r^2.$$

Para calcular el radio r se impone que pase por el punto $(4, 4)$, es decir, $(4-1)^2 + 4^2 = r^2$. Entonces $r = 5$ y la circunferencia pedida es:

$$(x-1)^2 + y^2 = 25.$$

Ejemplo 29. Calcular los focos de la hipérbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Los focos F y F' están en el eje de ordenadas por tanto son de la forma $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$. Como $a = 3$ y $b = 2$ teniendo en cuenta la relación $c^2 = a^2 + b^2$ se deduce que

$$c = \pm\sqrt{9+4} = \pm\sqrt{13}$$

y los focos son: $F(\sqrt{13}, 0)$ y $F'(-\sqrt{13}, 0)$.

Ejercicios Propuestos

Ejercicio 24. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro $(-1, 5)$ y radio 3.

Ejercicio 25. Calcular el centro de la circunferencia que pasa por los puntos $(0, 0)$, $(1, 2)$ y $(6, 3)$.

Ejercicio 26. Calcular el eje de simetría y el vértice de la parábola $-y^2 - 4y - 2 = x$.

Ejercicio 27. Clasificar la cónica $(x - y)(x + y) = 1$.

Soluciones

Solución 24. La circunferencia es $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$.

Solución 25. El centro es $(\frac{25}{6}, \frac{-5}{6})$.

Solución 26. El eje es $y = -2$ y el vértice $(2, -2)$.

Solución 27. Se trata de una hipérbola equilátera.

4. Prueba de autoevaluación

Haga el test siguiente de Verdadero o Falso para saber el nivel de conocimientos que tiene en este bloque.

Si A y B son matrices cuadras regulares, entonces AB posee inversa.	**Verdadero**	**Falso**
El determinante de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es 1.	**Verdadero**	**Falso**
Las raíces reales del polinomio $x^3 - 3x^2 - x + 3$ suman 3.	**Verdadero**	**Falso**
Un sistema de 3 ecuaciones lineales con 2 incógnitas tal que ninguna de sus ecuaciones es redundante, puede ser compatible indeterminado.	**Verdadero**	**Falso**
El sistema de ecuaciones $3x - y + z = 1$; $x - y = 2$; $x + y + z = 0$ es compatible determinado.	**Verdadero**	**Falso**
La suma de las coordenadas de cualquier vector normal al plano de ecuaciones paramétricas: $x = 2$, $y = 1 + \lambda$, $z = 2 - 2\mu$ es un número par.	**Verdadero**	**Falso**
$(-3, 3)$ es un vector dirección de la recta de ecuación $2x + 2y = 1$.	**Verdadero**	**Falso**
$$\frac{x-1}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+1}.$$	**Verdadero**	**Falso**
La ecuación $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 4 = 0$ define una circunferencia.	**Verdadero**	**Falso**
$x = 2$ es el eje de la parábola $y = x^2 - 2x - 4$.	**Verdadero**	**Falso**

Bibliografía

Cualquier libro utilizado en el Curso de Acceso a la Universidad.

Un material más completo lo forman:
libros de primero y segundo de bachillerato (tanto de Ciencias Sociales como Ciencias Experimentales).

Asimismo cualquier libro del antiguo Curso de Orientación Universitaria o C.O.U.

Recursos on line:WWW (World Wide Web)

Matex. Javier González. Universidad de Cantabria
http://personales.unican.es/gonzaleof/

Descartes. Ministerio de Educación y Ciencia
http://descartes.cnice.mecd.es/

Otros sitios de apuntes, ejercicios y videos.
http://www.matematicasies.com/

Índice alfabético