CURSOS 0

MATEMÁTICAS

Aplicaciones, funciones y gráficas

Daniel Franco Leis

Departamento de Matemática Aplicada

ETSI Industriales

UNED

CURSOS 0

Aplicaciones, funciones y gráficas

Prof. Daniel Franco Leis
Departamento de Matemática Aplicada
ETSI Industriales

Índice general

1. Introducción y objetivos

Las aplicaciones y funciones son una herramienta básica que debe conocer y manejar con soltura.

En este bloque recordaremos la definición de aplicación y algunas de las propiedades más importantes. También estudiaremos en este bloque las funciones que, como veremos, no son más que un tipo particular de aplicación.

En el caso de las funciones prestaremos especial atención a las representaciones gráficas. Todo estudiante de carreras técnicas o científicas debe conocer la representación gráfica de las funciones más importantes y al finalizar este bloque lo logrará.

1.1. Objetivos

- Comprender la definición de aplicación.
- Estudiar algunas propiedades básicas de las aplicaciones.
- Comprender la definición de función.
- A partir de la gráfica deducir el comportamiento de una función.
- Identificar la gráfica de las funciones más importantes.

2. Prueba de auto-diagnóstico

Haga el test siguiente para evaluar el nivel de conocimientos que tiene en este tema.

Una aplicación siempre asigna imágenes distintas a elementos distintos.	Verdadero	Falso
Una aplicación inyectiva siempre es sobreyectiva.	Verdadero	Falso
Dadas dos aplicaciones siempre se pueden componer.	Verdadero	Falso
La función dada por $f(x) = x^2$ es inyectiva.	Verdadero	Falso
El dominio y el rango de la función valor absoluto coinciden.	Verdadero	Falso
A partir de la gráfica de una función se puede deducir su dominio y rango	Verdadero	Falso
La gráfica de una función puede contener una circunferencia completa	Verdadero	Falso
La función dada por $f(x) = \ln x$ tiene dominio $(0, \infty)$	Verdadero	Falso
La función 2^x es sobreyectiva	Verdadero	Falso

Si ha tenido muchas dificultades y el número de respuestas correctas no le parece aceptable, debe hacer de forma ordenada todas las fichas que encontrará a continuación.

Si solamente ha tenido dificultades en algunos casos, localice las fichas correspondientes y repáselas. Si ha respondido todo correctamente puede pasar a otro bloque.

3. Contenidos

3.1. Ficha 1: Aplicaciones

Una **aplicación** p entre dos conjuntos no vacíos A y B se denota por

$$p\colon A \to B$$

y significa que p asigna a todo elemento de A (**conjunto de partida o inicial**) uno de B (**conjunto de llegada o final**) y solo uno.

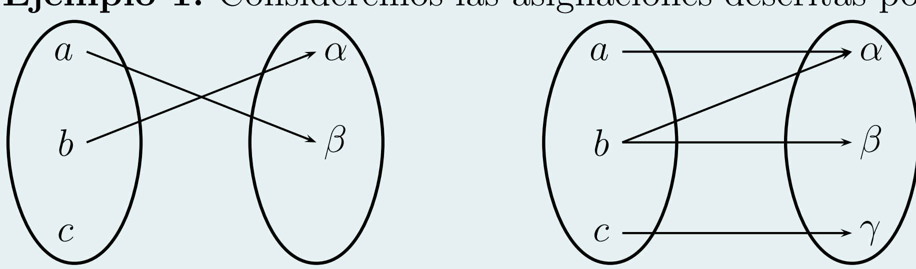
Para informar de que la aplicación p asigna $\beta \in B$ al elemento $a \in A$ escribiremos:

$$p(a) = \beta \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{rccc} p\colon & A & \to & B \\ & a & \rightsquigarrow & \beta, \end{array}$$

y diremos que β es la **imagen** de a por p.

La información del primer párrafo de esta página es importante. Si algún elemento de A no tiene imagen (no está definida) o algún elemento de A tiene más de una imagen (no está bien definida) no tenemos una aplicación.

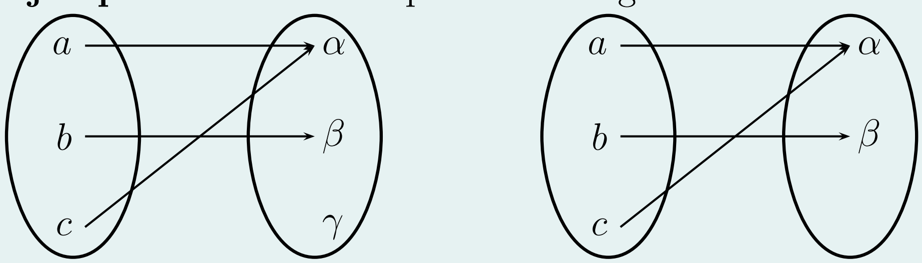
Ejemplo 1. Consideremos las asignaciones descritas por:



En el primer caso no tenemos una aplicación porque no está definida la imagen del elemento c, en el segundo caso no tenemos aplicación porque no está bien definida la imagen de b.

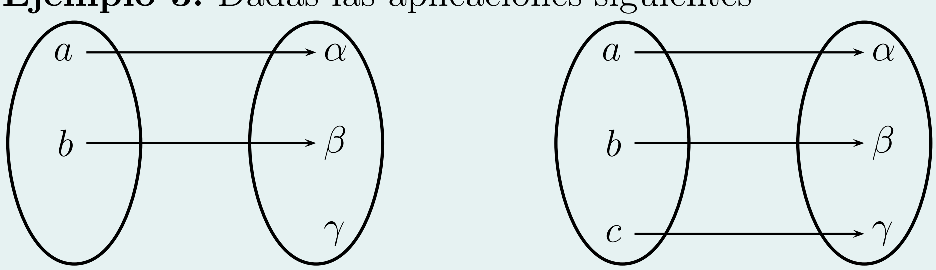
Una aplicación es **inyectiva** si no existen dos elementos distintos del conjunto de partida con la misma imagen. Una aplicación es **sobreyectiva** si todos los elementos del conjunto de llegada son imágenes de alguno del de partida. Una aplicación inyectiva y sobreyectiva se dice **biyectiva**.

Ejemplo 2. Dadas las aplicaciones siguientes:



La primera aplicación no es ni inyectiva (a y c tienen la misma imagen) ni sobreyectiva (γ no es imagen de ningún elemento). La segunda es sobreyectiva (todos los elementos del conjunto final reciben una flecha) pero no inyectiva (hay dos flechas que apuntan al mismo elemento).

Ejemplo 3. Dadas las aplicaciones siguientes



La primera aplicación es inyectiva (las imágenes de elementos distintos son distintas) pero no sobreyectiva. La segunda es biyectiva por ser inyectiva y sobreyectiva.

Sean $p\colon A \to B$ y $M \subset A$, el **conjunto imagen** de M por p se denota por $p(M)$ y se trata del conjunto formado por los elementos de B que son imágenes de algún elemento de M por p, esto es,

$$p(M) = \{b \in B : b = p(a) \text{ para algún } a \in M\}.$$

De forma similar el **conjunto imagen recíproca** de un subconjunto N de B es

$$p^{-1}(N) = \{a \in A : p(a) \in N\}.$$

Ejemplo 4. Dada $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que a cada natural le asigna su doble y dados $P = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ e $I = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ calculemos $p(P)$, $p(I)$, $p^{-1}(P)$ y $p^{-1}(I)$.

Como el doble de un número par es un múltiplo de 4 y el doble de un número impar es un múltiplo de 4 menos 2, se tiene

$$p(P) = \{4, 8, 12, 16, \dots\}, \quad p(I) = \{2, 6, 10, 14, \dots\}.$$

Por otro lado, para calcular $p^{-1}(P)$ debemos encontrar los elementos de $\mathbb{N}$ cuya imagen por p es un número par, es decir, cuya imagen pertenece a P. Como la imagen por p de cualquier número natural es un número par tenemos que

$$p^{-1}(P) = \mathbb{N}.$$

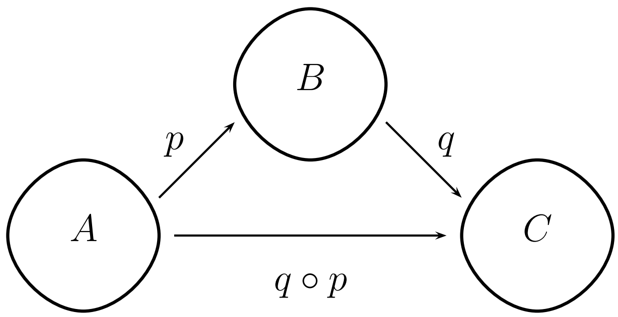
Finalmente

$$p^{-1}(I) = \emptyset$$

porque un número impar no es el doble de ningún número.

Si tenemos dos aplicaciones $p\colon A \to B$ y $q\colon B \to C$ es posible definir una aplicación entre A y C de la forma siguiente:

$$\begin{array}{rcl} q\circ p\colon A & \to & C \\ a & \rightsquigarrow & q(p(a)). \end{array}$$



La aplicación $q \circ p$ se llama **composición** de p con q o simplemente p **compuesta** con q.

Una aplicación $p\colon A \to B$ se puede componer solamente con aplicaciones que partan de conjuntos que contengan al conjunto imagen $p(A)$.

Ejemplo 5. La composición de $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, dada por $p(n) = 1 - n$, con $q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, dada por $q(z) = \frac{z}{z^2+1}$, es una aplicación entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$ dada por

$$q \circ p(n) = q(p(n)) = q(1-n) = \frac{1-n}{(1-n)^2+1} = \frac{1-n}{n^2-2n+2}.$$

Se llama **aplicación identidad** a la que lleva a un elemento en sí mismo, se suele denotar por id o por I. Por tanto,

$$id\colon A \to A$$

viene dada por $id(a) = a$ para todo $a \in A$.

Mediante $p\colon A \to B$ asignamos a cada elemento de A uno de B. ¿Será posible encontrar una aplicación que deshaga esa asignación?, esto es, que compuesta con p resulte la identidad. La respuesta es afirmativa solamente si p es inyectiva, siendo además única. Se llama **aplicación inversa**, se denota por $p^{-1}\colon p(A) \subset B \to A$ y verifica

$$p^{-1} \circ p = p \circ p^{-1} = id.$$

Ejemplo 6. Calculemos la aplicación inversa de $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $p(n) = 3n$.

Claramente p es inyectiva porque

$$n \neq m \quad \Rightarrow \quad p(n) = 3n \neq 3m = p(m)$$

y tenemos garantizada la existencia de aplicación inversa.
Se debe cumplir $p^{-1} \circ p(n) = n$, esto es, $p^{-1}(3n) = n$. Ahora haciendo $m = 3n$ tenemos que $p^{-1}(m) = \frac{m}{3}$. Por tanto, la aplicación inversa vendrá dada por la expresión $p^{-1}(m) = \frac{m}{3}$.
Veamos que $p \circ p^{-1} = id$. Efectivamente, sustituyendo resulta

$$p \circ p^{-1}(n) = p(\frac{n}{3}) = 3\frac{n}{3} = n.$$

Luego la aplicación $p^{-1}\colon \{3, 6, 9, \dots\} \to \mathbb{N}$ dada por la expresión $p^{-1}(m) = \frac{m}{3}$ es la inversa de p.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1. ¿Está bien definida $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tal que $p(n) = \sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$?

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 2. Si las aplicaciones $p\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ y $q\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ vienen dadas por $p(n) = \frac{n^2}{n+1}$ y $q = n^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, señale qué aplicaciones se pueden definir de entre las siguientes: $p \circ q$, $q \circ p$, $q \circ (p \circ q)$, $p \circ (p \circ q)$

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 3. ¿Es posible calcular la aplicación inversa de la aplicación $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada x le asigna x^2?

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 4. Calcule la aplicación inversa de la aplicación

$$p\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$$

que a cada x le asigna x^2.

Ver respuesta correcta.

Soluciones ejercicios propuestos

- Solución Ejercicio 1: No. Recuerde que por ejemplo $\sqrt{2}$ no es un número racional. Por lo tanto, no lleva elementos de $\mathbb{N}$ en elementos de $\mathbb{Q}$.
- Solución Ejercicio 2: Sabemos que:

  > Una aplicación $f\colon A \to B$ se puede componer solamente con aplicaciones que partan de conjuntos que contengan al conjunto imagen de f.

  Por tanto, solamente tiene sentido $p \circ q$.
- Solución Ejercicio 3: No es posible calcular la aplicación inversa porque la aplicación no es inyectiva. Por ejemplo, -1 y 1 tienen la misma imagen.
- Solución Ejercicio 4: En este caso la aplicación sí es inyectiva porque el cuadrado de dos números negativos distintos no puede coincidir.

  La inversa debe cumplir

  $$p^{-1} \circ p = id \quad \Rightarrow \quad p^{-1}(x^2) = x$$

  y sabemos que x es un número negativo.

  Haciendo $y = x^2$ tenemos que $x = -\sqrt{y}$. Por tanto, la aplicación
  $$p^{-1}\colon [0,\infty) \to (-\infty, 0]$$
  dada por $p^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ para todo número positivo es la inversa de p.

3.2. Ficha 2: Funciones

Las funciones es el nombre que se les da a las aplicaciones en cálculo. Por lo tanto, una función no es más que una aplicación. Aquí nos centraremos en las funciones reales de variable real.

Una **función** real de variable real es una aplicación f de un subconjunto[1] no vacío Ω de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

$$f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Ejemplo 7.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & 2 \end{array}$$

Esta función asigna la misma imagen a todos los elementos de $\mathbb{R}$. Se dice que es una **función constante**.

En muchas ocasiones, en lugar de la notación empleada en los ejemplos anteriores encontraremos la siguiente:

$$f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dada por } f(x) = 2.$$

Ejemplo 8.

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & x^2 \end{array}$$

Esta función asigna a cada elemento de $\mathbb{R}$ el valor de su cuadrado. Así, $f(1) = 1$, $f(-2) = 4$.

[1] Recuerde que un conjunto es subconjunto de si mismo, por tanto Ω puede ser en ocasiones $\mathbb{R}$.

Ejemplo 9.

$$\begin{array}{rcl} f\colon \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & |x| \end{array}$$

Esta función asigna a cada elemento su valor absoluto, es decir, $f(x) = |x| = x \cdot signo(x)$.

Ejemplo 10.

$$\begin{array}{rcl} f\colon [0,\infty) & \to & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & +\sqrt{x} \end{array}$$

Esta función no está definida para los números negativos.

Daremos nombres a tres conjuntos importantes que se definen a partir de una función $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

- El conjunto D se llama **dominio**y se denota por $dom(f)$.
- El conjunto $f(D)$ se llama **rango**.
- El conjunto $\{(x, f(x)) : x \in D\}$ se llama **gráfica** de la función.[2]

Obsérvese que los conjunto dominio y rango son el conjunto origen y el conjunto imagen ya vistos.

Ejemplo 11. La función $f\colon [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2x$ tiene por dominio el intervalo $[0,1]$, por rango el intervalo $[0,2]$ y por gráfica $\{(x, 2x) : x \in [0,1]\}$.

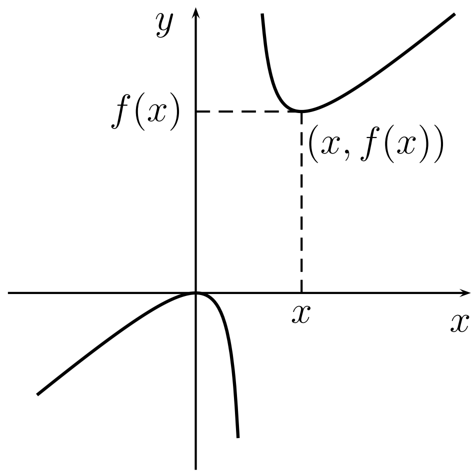
[2] Fíjese que el dominio y el rango son subconjuntos de $\mathbb{R}$ mientras que la gráfica es un subconjunto de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Es muy habitual que una función venga dada por una expresión $f(x)$ sin hacer mención a su dominio. En este caso, se sobreentiende que el dominio de la función es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ en el que la expresión $f(x)$ tiene sentido.

Ejemplo 12. La función definida por $f(x) = \dfrac{\pi}{x-1}$ tiene por dominio $\mathbb{R} - \{1\}$ porque para 1 se anula el denominador de la expresión $\dfrac{\pi}{x-1}$ y por tanto no tiene sentido f en 1.

Ejemplo 13. La función definida por $f(x) = \ln x$ tiene por dominio $(0, \infty)$ porque para valores no positivos el logaritmo neperiano no está definido.

La gráfica de una función $f\colon D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es extremadamente útil para entender su comportamiento. Su gráfica $\{(x, f(x)) : x \in D\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que puede ser dibujado con ayuda de unos ejes coordenados. Conocida la gráfica podremos saber rapidamente si un elemento está en el dominio, si un elemento está en el rango, si la función es inyectiva o si la función es sobreyectiva.



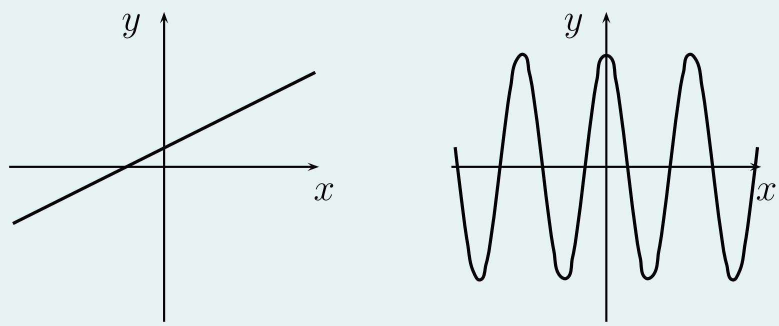
Para conocer la imagen de un punto x debemos trazar una recta perpendicular al eje X pasando por x. Tal recta cortará a la gráfica de la función como mucho en un punto (si la cortase en más de un punto la función no estaría bien definida: x tendría más de una imagen). Si no corta a la gráfica significa que ese elemento x no está en el dominio. Si por el contrario la corta, trazando una recta paralela al eje X en el punto de corte obtendremos el valor de la imagen, $f(x)$, en el eje Y.

Para saber si un elemento $y \in \mathbb{R}$ está en el rango de la función trazamos una recta paralela al eje X desde el punto y en el eje Y. Si esa recta corta a la gráfica, el elemento y pertenece al rango.

A la vista de la gráfica de una función podemos deducir si es inyectiva o sobreyectiva:

- Si todas las rectas paralelas al eje X cortan a la gráfica de la función, ésta es sobreyectiva.
- Si ninguna recta paralela al eje X corta a la gráfica en más de una ocasión, ésta es inyectiva.

Ejemplo 14. Consideremos las dos gráficas siguientes:



La primera gráfica corresponde a una función inyectiva y sobreyectiva (cualquier recta horizontal corta a la gráfica en una ocasión y solamente en una). La segunda a una función que no es ni inyectiva (hay rectas horizontales que cortan a la gráfica en más de una ocasión) ni sobreyectiva (hay rectas horizontales que no cortan a la gráfica en ninguna ocasión).

Ejercicios propuestos

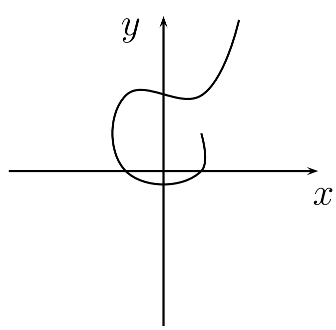
Ejercicio 5. ¿Coinciden el dominio de $f(x) = |x|$ y su rango?

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 6. Dadas dos funciones con expresiones $f(x)$ y $g(x)$ podemos definir una nueva función $f \cdot g$ que recibe el nombre de función producto y que viene dada por la expresión $f(x) \cdot g(x)$. ¿El dominio de la función producto $f \cdot g$ es la intersección de los dominios de f y g? Calcule el dominio de $h(x) = \frac{1}{x-1} \ln x$.

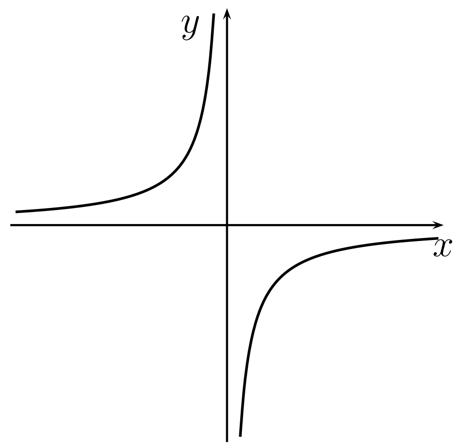
Ver respuesta correcta.

Ejercicio 7. ¿La gráfica siguiente corresponde a una función?



Ver respuesta correcta.

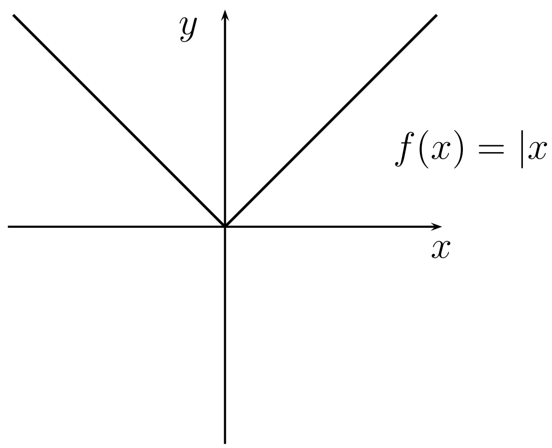
Ejercicio 8. ¿La gráfica siguiente corresponde a una función? ¿Es su dominio todo $\mathbb{R}$? ¿Es su rango un intervalo acotado?



Ver respuesta correcta.

Soluciones ejercicios propuestos

- Solución Ejercicio 5: No. El dominio de la función valor absoluto es todo $\mathbb{R}$ ya que la expresión $|x|$ tiene sentido para todo x. Sin embargo, la función solamente toma valores no negativos y por tanto su rango es $[0, \infty)$. A continuación aparece la gráfica de la función valor absoluto.



- Solución Ejercicio 6: Sí. El dominio de la función producto $f \cdot g$ viene dado por los valores de x para los que la expresión $f(x) \cdot g(x)$ tenga sentido. Por tanto deben tener sentido tanto $f(x)$ como $g(x)$. Así el dominio está formado por los elementos que están en los dominios de f y g a la vez $dom(f \cdot g) = dom(f) \cap dom(f)$.

  Para calcular el dominio de

  $$h(x) = \frac{1}{x - \pi} \ln x$$

  calculamos el dominio de cada uno de los factores que definen h. La expresión $\frac{1}{x-\pi}$ da lugar a una función con dominio $\mathbb{R} - \{\pi\}$ y la expresión $\ln x$ da lugar a una función con dominio $(0, \infty)$. El dominio buscado es

$$[\mathbb{R} - \{\pi\}] \cap (0, \infty) = (0, \infty) - \{\pi\}.$$

- Solución Ejercicio 7: No. Un elemento x no puede tener dos imágenes distintas. Trazando, por ejemplo, una recta paralela al eje Y por el punto $(0, 0)$ vemos que interseca a la gráfica en dos ocasiones.

- Solución Ejercicio 8: Sí, corresponde a una función porque cada x tiene a lo sumo una imagen $f(x)$.

  Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$ porque salvo que la situemos en $x = 0$ toda recta vertical corta a la gráfica.

  Su rango es $\mathbb{R} - \{0\}$ porque salvo que la situemos en $y = 0$ toda recta horizontal corta a la gráfica. Por lo tanto, el rango de la función no es un intervalo acotado.

3.3. Ficha 3: Funciones algebraicas

En esta ficha y la siguiente recordaremos las gráficas de algunas funciones muy importantes y a partir de ellas deduciremos varias de las propiedades que las hacen singulares[3].

Antes de empezar estableceremos que una función es **estrictamente creciente** en un intervalo si al situarnos sobre su gráfica en ese intervalo y avanzar de izquierda a derecha la gráfica sube. De forma similar diremos que una función es **estrictamente decreciente** en un intervalo si al situarnos sobre su gráfica en dicho intervalo y avanzar de izquierda a derecha la gráfica baja.

Por ejemplo, la función valor absoluto que apareció representada anteriormente es estrictamente creciente en $(0, \infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$.

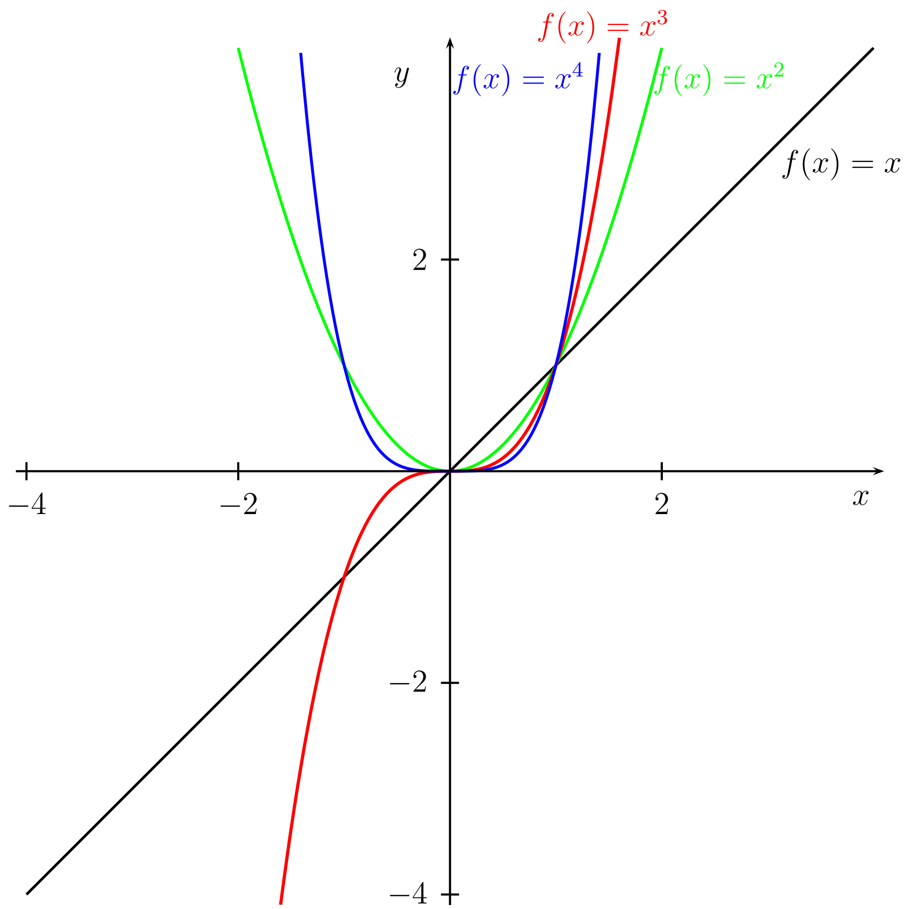
Funciones potenciales

Las funciones $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}$ son habitualmente llamadas **funciones potenciales**. Tienen dominio todo $\mathbb{R}$ y el rango depende de si n es par o impar, siendo

- $[0, \infty)$ para n par.
- $\mathbb{R}$ para n impar.

Mire con detenimiento las gráficas de las funciones potenciales $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^4$ que aparecen a continuación.

[3] Si nunca ha visto las gráficas de estas funciones este recordatorio no es suficiente y necesitará utilizar la bibliografía complementaria para adecuar su formación



Las gráficas muestran que para n par existe una simetría con respecto al eje $0Y$ y para n impar existe una simetría con respecto al origen $(0, 0)$.

Ahora no debe sorprendernos que una función simétrica con respecto al eje $0Y$, esto es, que verifica $f(x) = f(-x)$ para todo x, se llame **función par** y una función que es simétrica con respecto al origen, esto es que verifica $f(x) = -f(-x)$, se llame **función impar**.

Las funciones potenciales son estrictamente crecientes en todo $\mathbb{R}$ para n impar. Sin embargo, para n par son estrictamente decrecientes en $(-\infty, 0)$ y estrictamente crecientes en $(0, \infty)$.

Funciones polinómicas

Una combinación lineal de funciones potenciales da lugar a una función polinómica. En otras palabras,

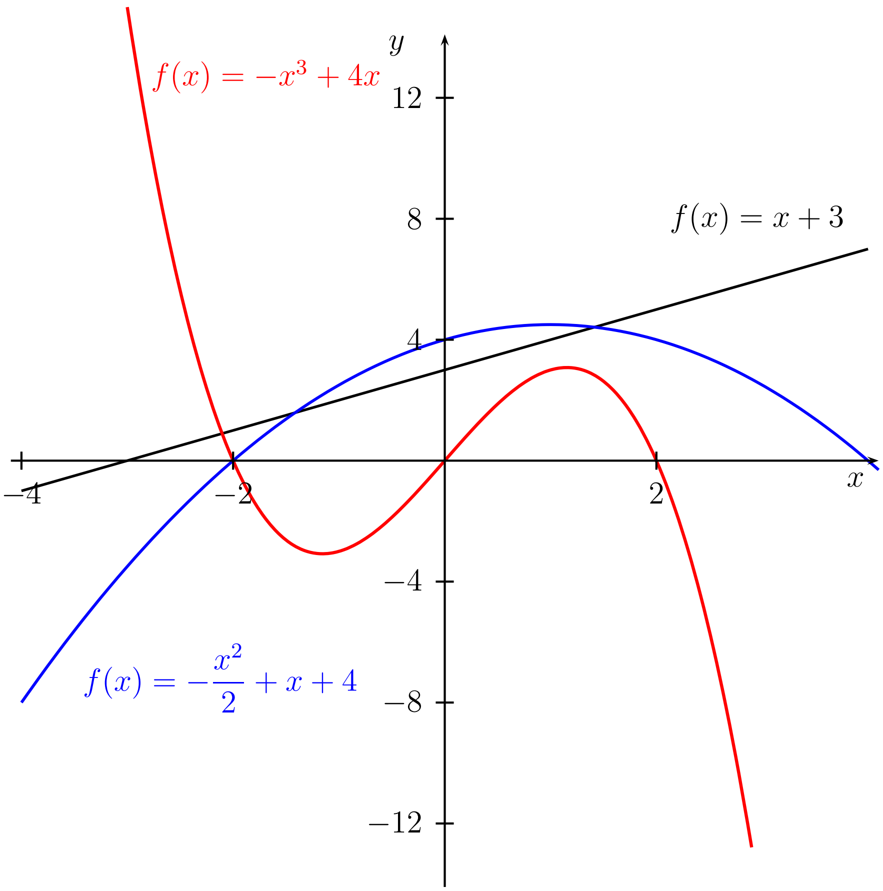
$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_n \neq 0$ y $a_i \in \mathbb{R}$ para $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ es una **función polinómica** de grado n. Por ejemplo, $f(x) = -3x^3 + x + 1$ o $f(x) = x^6 + x^4 + 1$ son funciones polinómicas de grado 3 y 6 respectivamente.

El dominio de estas funciones es todo $\mathbb{R}$ y el rango depende al igual que en las funciones potenciales del carácter par o impar del grado n.

Como un polinomio de grado n puede tener a lo sumo n raíces reales, la gráfica de una función polinómica de grado n corta al eje $0X$ como mucho en n ocasiones y tendrá también como mucho $n-1$ cumbres (máximos relativos) o valles (mínimos relativos).

A continuación dibujaremos las gráficas de tres funciones polinómicas de grados 1, 2 y 3 respectivamente. Fíjese con detenimiento en el comportamiento de cada una de ellas, cuente el número de cortes con los ejes, cuente el número de cumbres y valles, verifique el dominio y el rango.



Algunas funciones polinómicas tienen nombre propio debido a su importancia:

- Las funciones dadas por $f(x) = m$ con $m \in \mathbb{R}$ se llaman **funciones constantes** y su gráfica es una línea recta horizontal.
- Las funciones dadas por $f(x) = mx$ con $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ se llaman **funciones lineales** y su gráfica es una línea recta de pendiente m que pasa por el origen.
- Las funciones dadas por $f(x) = mx + n$ con $m, n \in \mathbb{R}$ se llaman **funciones afines** y su gráfica es una línea recta de pendiente m que pasa por el punto $(0, n)$.

- Las funciones dadas por $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ se llaman **funciones cuadráticas** y su gráfica es una parábola[4].

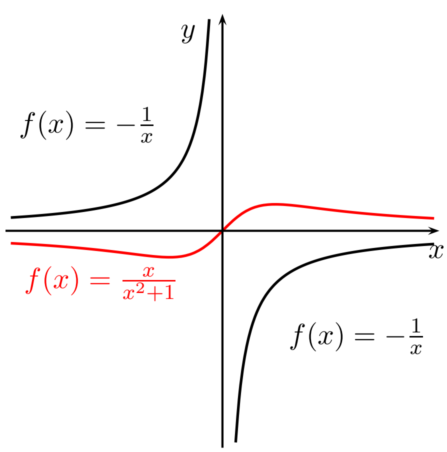
Funciones racionales

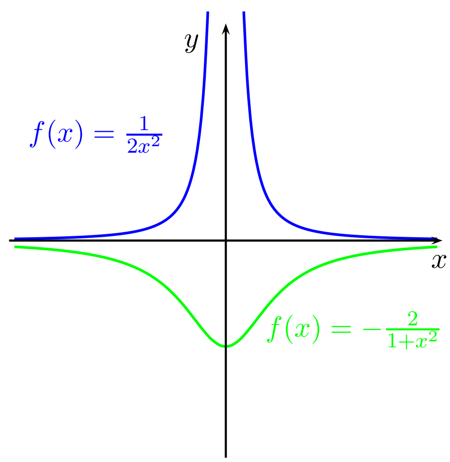
Son las que se construyen dividiendo dos funciones polinómicas, por ejemplo, $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3+3}$.

Su dominio es $\mathbb{R}$ menos los posibles puntos en los que se anule el denominador[5].

Su comportamiento varía enormemente tal y como muestran las gráficas que aparecen a continuación.

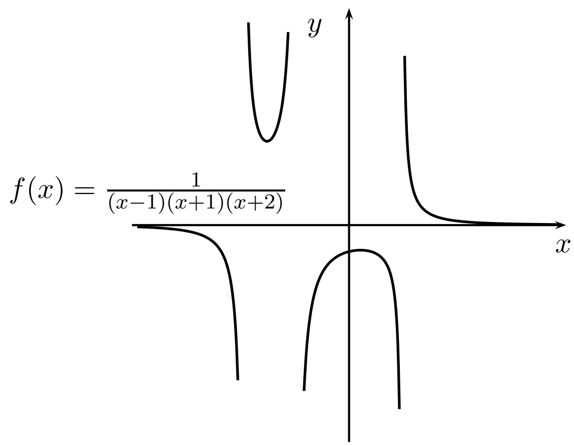
Observamos que justo antes y justo después de los puntos que no pertenecen al dominio la función crece o decrece estrictamente tomando valores tan grandes (o tan pequeños) como se quiera.





[4]Con forma de $\cup$ si $a > 0$ y con forma de $\cap$ si $a < 0$

[5]Si el denominador y el numerador tiene raíces comunes antes debemos simplificar, por ejemplo, $f(x) = \frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)} = \frac{x+1}{x+2}$.

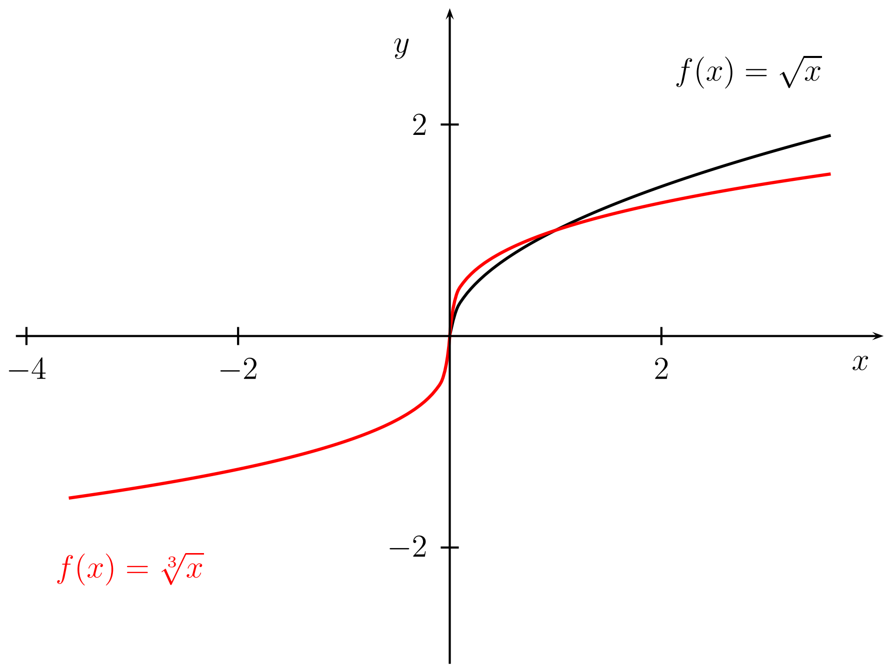


Funciones radicales

Las funciones $f(x) = \sqrt[n]{x}$ con $n \in \mathbb{N}$ son habitualmente llamadas **funciones radicales**.

Tienen dominio $[0, \infty)$ si n es par y todo $\mathbb{R}$ si n es impar. El rango también depende de la paridad de n: si n es par entonces es $[0, \infty)$, si n es impar entonces el rango es todo $\mathbb{R}$.

Son funciones estrictamente crecientes en su dominio de definición con independencia de si n es par o impar. Pero tal y como se observa en la figura crecen mucho más despacio que las funciones potenciales.



Las funciones radicales y las potenciales son inversas unas de otras pero debemos tener cuidado. Si n es impar no hay problema porque la función $f(x) = x^n$ es inyectiva y su inversa es $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.

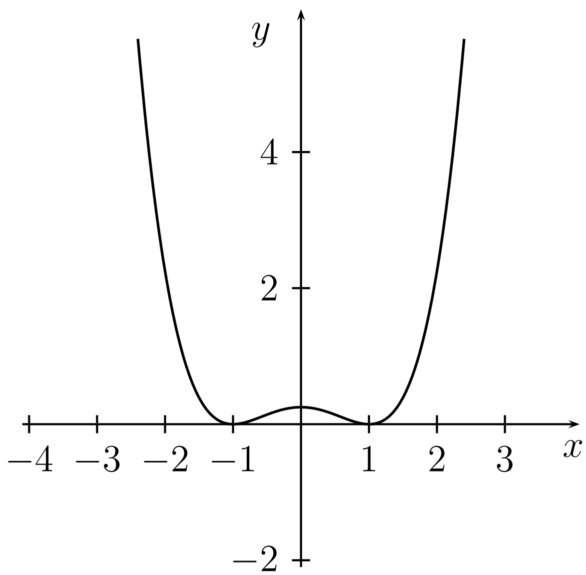
Las dificultades aparecen para n par ya que $f(x) = x^n$ no es inyectiva y en consecuencia no tiene inversa en todo su dominio. Sin embargo, si restringimos el dominio a $(-\infty, 0)$ o $(0, \infty)$ sí son inyectivas y sus inversas son respectivamente $f^{-1}(y) = -\sqrt[n]{y}$ y $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.

Ejercicios propuestos

Ejercicio 9. ¿Las funciones son siempre estrictamente crecientes o estrictamente decrecientes?

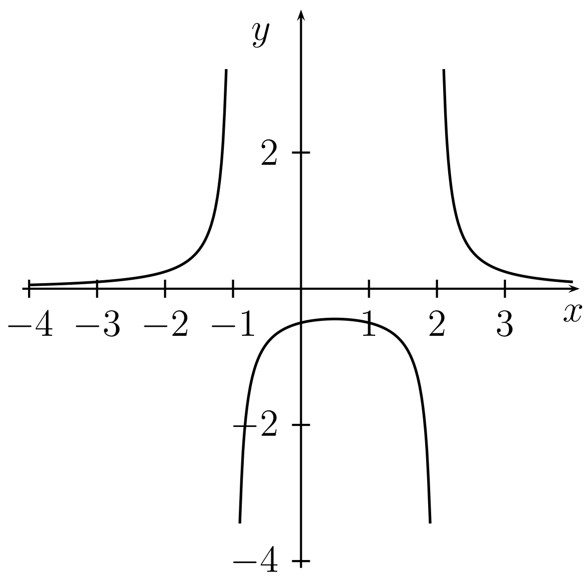
Ver respuesta correcta.

Ejercicio 10. Señale en que intervalos es estrictamente creciente y en que intervalos es estrictamente decreciente la función cuya gráfica aparece a continuación.



Ver respuesta correcta.

Ejercicio 11. La gráfica siguiente corresponde a una función racional de expresión $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x+b)}$ con a y b números reales positivos. ¿Puede determinar los valores de a y b?



Ver respuesta correcta.

Ejercicio 12. ¿Todas las funciones radicales $f(x) = \sqrt[n]{x}$ son estrictamente crecientes en su dominio de definición?.

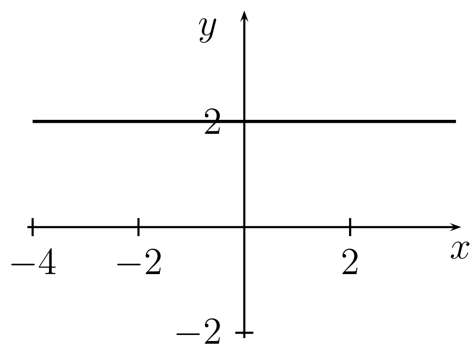
Ver respuesta correcta.

Ejercicio 13. Clasifique y calcule el dominio de la función dada por $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

Ver respuesta correcta.

Soluciones ejercicios propuestos

- Solución Ejercicio 9: No. Por ejemplo, una función constante no es ni estrictamente creciente ni estrictamente decreciente. Su gráfica no sube ni baja al avanzar de izquierda a derecha. A continuación aparece la gráfica de la función constante $f(x) = 2$.



- Solución Ejercicio 10: Si avanzamos de izquierda a derecha sobre la gráfica vemos que hasta $x = -1$ la gráfica baja, entre $x = -1$ y $x = 0$ la gráfica sube, entre $x = 0$ y $x = 1$ la gráfica baja y a partir de $x = 1$ la gráfica sube. Por tanto, la función es estrictamente creciente en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, +\infty)$, mientas que la función es estrictamente decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$.

- Solución Ejercicio 11: Se trata de una función racional. Sabemos que las raíces del denominador determinan el dominio. En la gráfica observamos que la función no está definida para $x = -1$ y $x = 2$. Por lo tanto los valores buscados son $a = 2$ y $b = 1$, siendo la función $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}$.

- Solución Ejercicio 12: Sí. Las funciones radicales son estrictamente crecientes en su dominio de definición.

- Solución Ejercicio 13: Se trata de una función racional porque su expresión viene dada por el cociente de dos polinomios. El dominio es todo $\mathbb{R}$ porque el polinomio $x^2 + 1$ no tiene raíces reales.

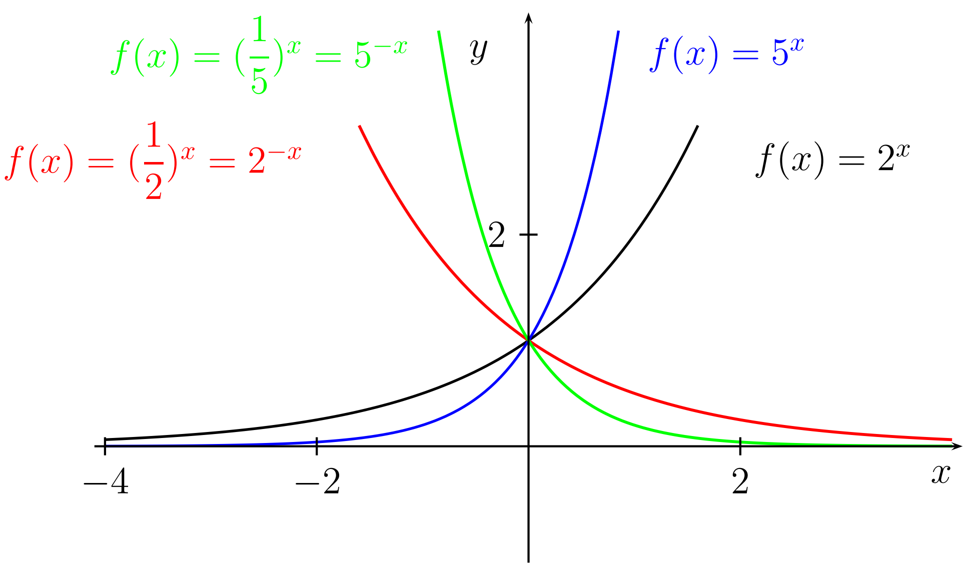
3.4. Ficha 4: Funciones transcendentes

Funciones exponenciales

La expresión $f(x) = a^x$ con $a > 0$ define una **función exponencial** de base a.

El dominio de una función exponencial es todo $\mathbb{R}$ con independencia del valor de la base $a > 0$. Si $a = 1$ la función exponencial es la función constante 1 y en este caso su rango es $\{1\}$. Si $a > 1$ la función es creciente y si $a < 1$ la función es decreciente, en ambos casos el rango es $(0, \infty)$.

Cuando se habla de función exponencial sin especificar la base se sobrentiende que nos referimos a la función exponencial de base e, esto es, $f(x) = e^x$ o como aparece en algunos textos $f(x) = \exp(x)$.

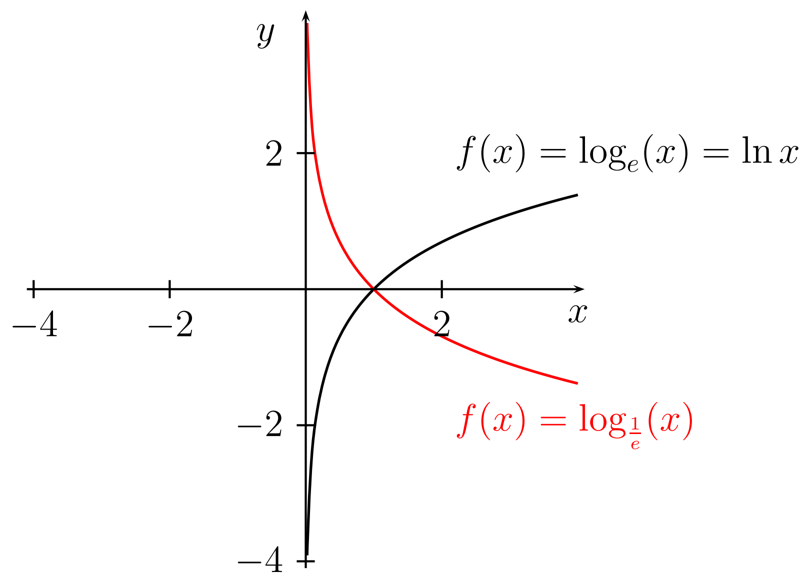


Como vemos, las funciones exponenciales son estrictamente crecientes si su base es mayor que 1 y estrictamente decrecientes si su base es menor que 1.

Funciones logarítmicas

Una función exponencial con base $a \neq 1$ es inyectiva. Por lo tanto tendrá inversa. La función inversa recibe el nombre de **función logarítmica** o **función logaritmo** de base a, $f(x) = \log_a x$. Si la base es el número e la función se llama función logaritmo neperiano y se denota por $f(x) = \ln x$.[6]

Dado que son inversas de funciones exponenciales (que como vimos tienen dominio todo $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$), su dominio será $(0, \infty)$ y su rango todo $\mathbb{R}$.



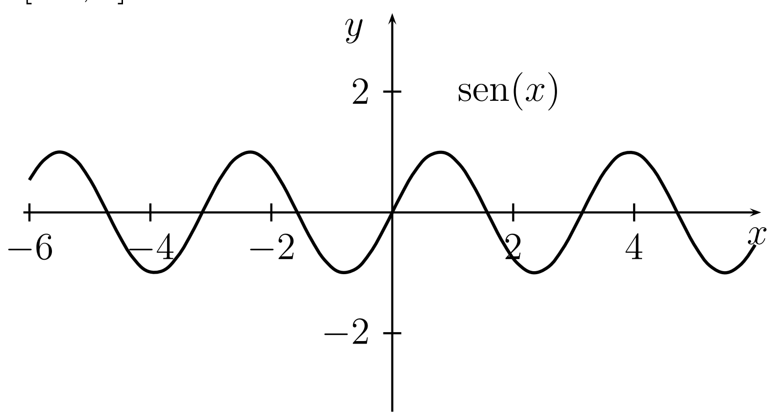
Son funciones sobreyectivas e inyectivas que en 1 toman el valor 0. Si la base es mayor que 1 la función logarítmica es estrictamente creciente, si por el contrario la base pertenece al intervalo $(0, 1)$ la función logarítmica es estrictamente decreciente.

Funciones seno, coseno y tangente

[6]Al igual que ocurría con la función exponencial si no nos referimos a la base estamos sobrentendiendo que nos referimos a la función logaritmo neperiano.

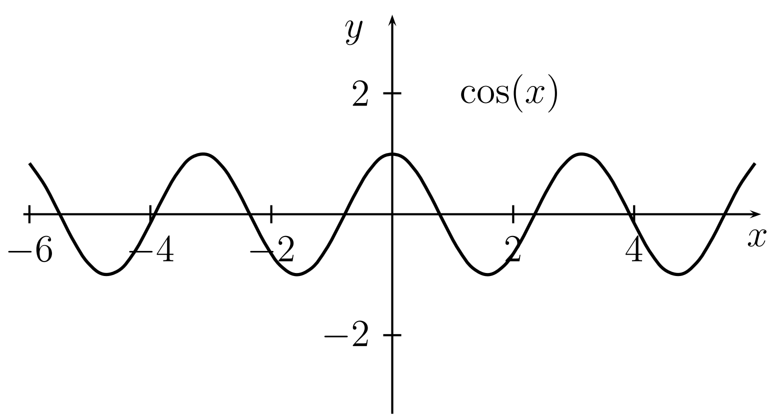
Las funciones trigonométricas son las que a cada x le asignan el valor de alguna razón trigonométrica de x. Las más importantes son $\operatorname{sen} x$, $\cos x$ y $\operatorname{tg} x$.

La gráfica de la **función seno**, $f(x) = \operatorname{sen} x$, aparece a continuación y vemos que el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$ y el rango es $[-1, 1]$.



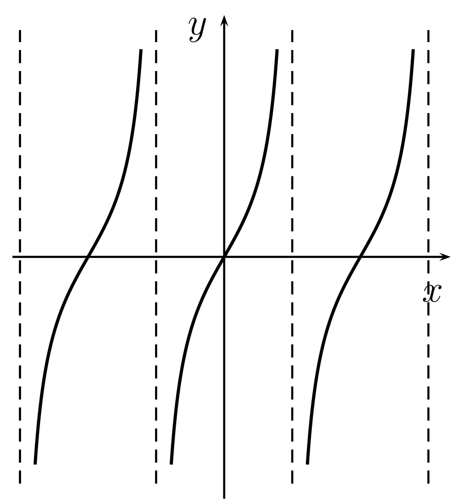
No es una función sobreyectiva ni inyectiva. Se verifica que $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$ y $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x$. Por lo tanto es una función impar y periódica.

La gráfica de la **función coseno**, $f(x) = \cos x$, aparece a continuación y vemos que el dominio de la función es todo $\mathbb{R}$ y el rango es $[-1, 1]$.



No es una función sobreyectiva ni inyectiva. Se verifica que $\cos 0 = 1$, $\cos x = \cos(-x)$ y $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Por lo tanto es una función par y periódica.

La gráfica de la **función tangente**, $\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, aparece a continuación y vemos que no pertenecen al dominio de la función los números de la forma $\frac{\pi}{2} + n\pi$ y que su rango es $\mathbb{R}$. Se verifica que $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$ y $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$. Por lo tanto, es una función impar y periódica.



Ejercicios propuestos

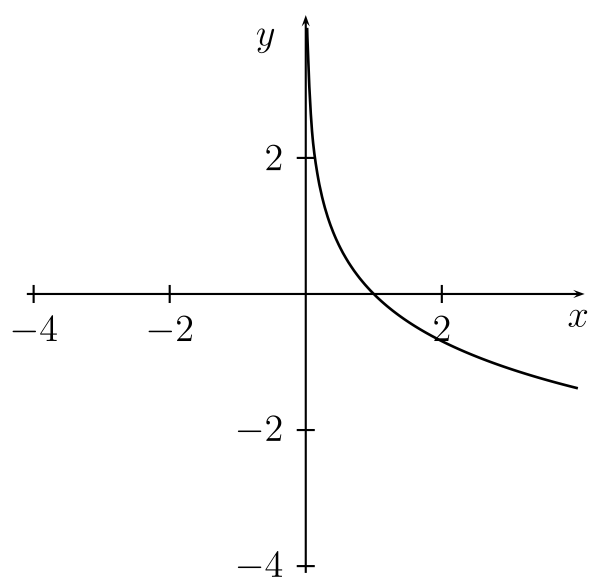
Ejercicio 14. ¿Coinciden el dominio de $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \ln |x|, & x < 0 \end{cases}$ y su rango? ¿Podría dibujarla?

Ver respuesta correcta.

Ejercicio 15. ¿El dominio y el rango de $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ y $g(x) = 2 \operatorname{sen} x$ coinciden?

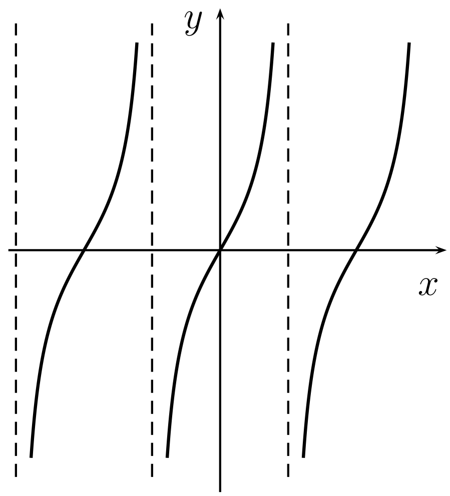
Ver respuesta correcta.

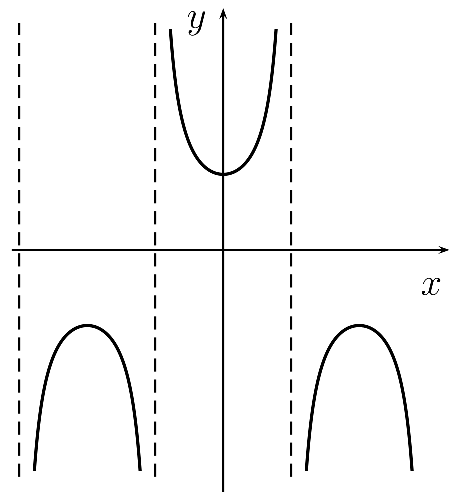
Ejercicio 16. La gráfica siguiente corresponde a una función exponencial, logarítmica o polinómica. ¿Puede determinar a cuál?



Ver respuesta correcta.

Ejercicio 17. Una de las siguientes gráficas se corresponde con la de $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, determínela.

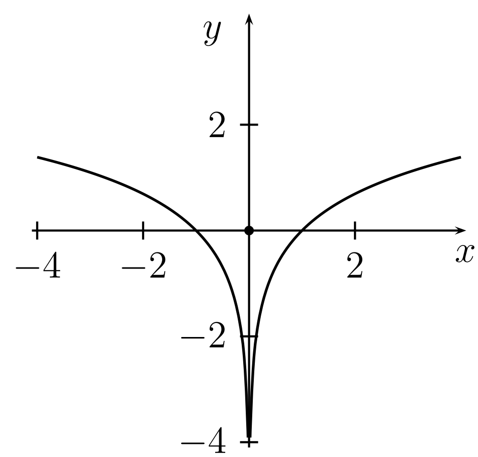




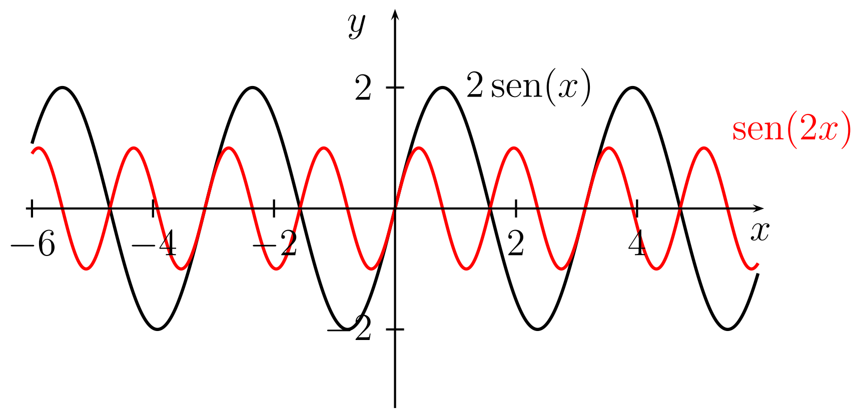
Ver respuesta correcta.

Soluciones ejercicios propuestos

- Solución Ejercicio 14: Sí. El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$ puesto que está bien definida para todo número real. Por otro lado el rango también es $\mathbb{R}$ porque la función logaritmo neperiano verifica $\ln((0,\infty)) = \mathbb{R}$. La gráfica aparece a continuación.



- Solución Ejercicio 15: El dominio coincide pero el rango no. Ambas están definidas en todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto su dominio es el mismo. Sabemos que $\operatorname{sen} x$ toma valores en el intervalo $[-1, 1]$, por tanto $2 \operatorname{sen} x$ tomará valores en $[-2, 2]$. Por otro lado, si llamamos $w = 2x$, tenemos que $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} w$ que como ya hemos dicho toma valores en $[-1, 1]$. A continuación aparecen las gráficas de ambas funciones



- Solución Ejercicio 16: La gráfica tiene que ser de una función logarítmica porque las otras dos tienen dominio todo $\mathbb{R}$ y como vemos los números negativos no tienen imagen para la función representada en la gráfica. Además, como es estrictamente decreciente, podemos afirmar que la base es un número del intervalo $(0, 1)$.

- Solución Ejercicio 17: En la primera la imagen de 0 es 0. Pero $\sec 0 = \frac{1}{\cos 0} = 1$. Por tanto, es la segunda.

4. Prueba de autoevaluación

Dada una aplicación sobreyectiva: dos elementos distintos siempre tienen imágenes distintas.	Verdadero	Falso
Una aplicación sobreyectiva siempre es inyectiva.	Verdadero	Falso
Dadas dos aplicaciones siempre se pueden componer.	Verdadero	Falso
La función dada por $f(x) = x^4$ es inyectiva.	Verdadero	Falso
El dominio y el rango de la función logaritmo neperiano coinciden.	Verdadero	Falso
A partir de la gráfica de una función se puede deducir si es estrictamente creciente.	Verdadero	Falso
La gráfica de una función siempre puede pintarse sin levantar el lápiz del papel.	Verdadero	Falso
La función dada por $f(x) = \frac{1}{x+1} \ln x$ tiene dominio $(0, \infty)$.	Verdadero	Falso
La función 2^x es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$.	Verdadero	Falso

Bibliografía

[1] http://personales.unican.es/gonzaleof/# Página del proyecto MaTeX que desarrolla todas los temas de los cursos de Bachillerato (Ciencias y Sociales).

[2] http://descartes.cnice.mec.es/ Página del proyecto Descartes que entre otras cosas desarrolla unidades didácticas de la ESO y el Bachillerato.

Índice alfabético