CURSOS 0
MATEMÁTICAS

Combinatoria:
Variaciones, Permutaciones y Combinaciones. Potencias de un binomio.

Miguel Delgado Pineda
Departamento de Matemáticas Fundamentales
Facultad de Ciencias

UNED

CURSOS 0

Índice

1. Introducción y objetivos.

Cada persona se ha enfrentado en algún momento de su vida cotidiana, a problemas, donde es necesario contar el número de composiciones distintas, con las que pueden presentarse diversos objetos reunidos formando un bloque. En definitiva, este problema suele solventarse en casos elementales, contando los elementos de un conjunto de composiciones de forma directa, es decir, uno a uno. En general, se trata de determinar el número entero no negativo (cero o más), de esas composiciones.

> Se lanzan tres monedas al aire: ¿Cuántas composiciones correspondientes a ese lanzamiento poseen una cara?

Se puede pensar en construir el conjunto de esas composiciones, pero, salvo en casos muy elementales, ese trabajo de construcción suele ser más complejo que el simple contar de esas composiciones.

> Se lanza una moneda al aire 30 veces seguidas: ¿Cuántas composiciones correspondientes a esos 30 lanzamientos poseen 7 caras?

En este tema, se tratan algunas técnicas básicas para contar los elementos de conjuntos de composiciones de diversos objetos. En todos los ejemplos que vamos a ver, será necesario contar cuántos elementos poseen los conjuntos implicados en cada problema particular. En los ejemplos elementales, este conjunto está definido por composiciones que verifican una propiedad simple y la enumeración de elementos es fácil.

> Un restaurante tiene una carta que consta de siete primeros platos, ocho segundos y seis postres:. ¿Cuántos menús formados por tres platos, uno del primer grupo, uno del segundo y un postre, se pueden confeccionar?

Existen conjuntos, donde las composiciones, o agrupaciones, verifican varias propiedades y este cálculo no es tan fácil.

> Al restaurante anterior, entran cinco amigos: ¿Cuántas composiciones distintas de cinco menús de tres platos pueden seleccionar los cinco amigos, tal que, cada par de amigos únicamente coincida en un plato seleccionado?

Entre las habilidades matemáticas indispensables para cualquier persona que quiera realizar una carrera de Ciencias, o de Ingeniería, debe atesorarse la de contar este tipo de composiciones de una forma fluida, puesto que aparecen con bastante frecuencia. No basta con tener capacidad de manejarlos, sino que se debe hacer con gran soltura. Las técnicas empleadas pueden parecer elementales, pero la experiencia nos hace detectar deficiencias cognitivas cuyo origen es un mal conocimiento de estas habilidades tan básicas y prácticas.

Este módulo consta de tres fichas: En la primera, se tratan inicialmente tanto las variaciones como las permutaciones de objetos cuando estos no pueden repetirse, y se concluye con los casos en los cuales los objetos pueden repetirse. En todos los casos, se presentan las fórmulas que permiten el cálculo del número de variaciones o de permutaciones distintas. La segunda ficha, se dedica a tratar de igual forma el caso de las combinaciones de objetos.

En la tercera ficha, se presentan algunas propiedades de los números expresados como números combinatorios, y las potencias de un binomio cuando el exponente es un número natural. Esta ficha, finaliza con la expresión del desarrollo de las potencias de un binomio con números combinatorios.

1.1 Objetivos:

- Conocer las distintas formas de agrupar objetos.
- Reconocer en cada agrupación la clave combinatoria de su formación.
- Calcular el número de variaciones, o permutaciones, tanto si es posible repetir objetos en las agrupaciones, como si no es posible.
- Calcular el número de combinaciones, tanto si es posible repetir objetos en las agrupaciones, como si no es posible.
- Conocer y utilizar algunas propiedades de los números combinatorios.
- Manejar los desarrollos de un binomio.

2. Prueba de autodiagnóstico.

1. ¿Cuántas banderas tricolor de tres franjas horizontales se pueden construir, al disponer de cinco telas de colores distintos?

2. ¿Cuántas clasificaciones finales se pueden presentar al final de la prueba de natación de 100 m libres, en la que compiten ocho nadadores?

3. El seleccionador de tenis de un país elige a cinco tenistas para jugar la copa Davis: ¿Cuántas parejas distintas puede elegir para jugar el partido de dobles?

4. Sobre una diana de dardos, están marcadas las siguientes puntuaciones: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 25, 50. ¿Cuántas puntuaciones pueden alcanzarse, al lanzar un dardo cada componente de un equipo de tres jugadores?

5. Se disponen de seis naipes rotulados con las letras P, A, T, A, T, A. Se barajan y extraen una tras otra, anotando en cada caso su correspondiente letra: ¿Cuál es el número de anotaciones posibles de las seis letras?

6. Ordenar de mayor a menor las siguientes parejas de números (factoriales): 4! y 6!, y (combinatorios): $\binom{7}{3}$ y $\binom{10}{6}$.

7. Efectuar la siguiente suma: $\binom{8}{3}+\binom{8}{4}$

8. Desarrollar los siguientes binomios: $(1+a)^4$ y $(b-2)^5$.

9. ¿Existe algún término del desarrollo del binomio $(a^2+b)^6$, que una vez desarrollado posea el producto a^4b^4?

10. Efectuar la siguiente suma: $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

Una vez realizada la prueba, puede ver las respuestas en la página siguiente. Si ha respondido a todo correctamente puede pasar a otro módulo.

Si ha tenido dificultades, si el número de respuestas correctas no le parece aceptable, o si ha tardado más de 60 minutos en contestar; estudie ordenadamente las fichas que encontrará a continuación. Si tan sólo ha tenido dificultades en algunas cuestiones puntuales, repase las fichas correspondientes a tales preguntas.

Respuestas a la prueba de autodiagnóstico:

1. Cada bandera, es una variación sin repetición, de cinco colores tomados de tres en tres. Recuerde, que el número de variaciones sin repetición es:

$$V_{5,3} = 5 \times 4 \times 3 = 60\ .$$

2. Cada clasificación, es una permutación sin repetición, de ocho nadadores. Recuerde, que el número de permutaciones sin repetición es:

$$P_8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320.$$

3. Cada pareja de dobles, es una combinación sin repetición, de cinco elementos tomados de dos en dos. Recuerde, que el número de combinaciones sin repetición es:

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10.$$

4. Cada puntuación, es una variación con repetición, de trece valores tomados de tres en tres. Recuerde, que el número de variaciones con repetición es:

$$VR_{13,3} = 13^3 = 2197.$$

5. Cada línea de escritura, es una permutación con repetición, de seis letras tomadas de tres en tres, de dos en dos y de una en una. Recuerde, que el número de permutaciones con repetición es:

$$P_{6,3,2,1} = \frac{6!}{3! \times 2! \times 1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1} = 60.$$

6. De la pareja de números (factoriales): $4! < 6!$, puesto que 4<6, y de la pareja de números (combinatorios): $\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2} = 35$ y $\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2} = 210$; luego $\binom{7}{3} < \binom{10}{6}$.

7. $\binom{8}{3} + \binom{8}{4} = \binom{9}{4} = \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2} = 126$.

8. Al aplicar la fórmula del desarrollo del binomio de Newton, se tiene que:

   $(1 + a)^4 = 1 + 4a + 6a^2 + 4a^3 + a^4$,

   $(b - 2)^5 = b^5 - 10b^4 + 40b^3 - 80b^2 + 80b - 32$.

9. No. Todos los términos de desarrollo del binomio se pueden escribir de la forma:

   $\binom{5}{k}(a^2)^{5-k}b^k = \binom{5}{k}a^{10-2k}b^k$,

   así pues, es imposible que se verifique al mismo tiempo que 10-2k=4 y que k=4.

10. 32, puesto que $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = (1 + 1)^5 = 32$.

3. Contenidos.

Los contenidos teóricos de este tema, corresponden a la necesidad de conocer las distintas formas de agrupar objetos según algún criterio, y de reconocer en cada agrupación la clave combinatoria de su formación. Estos contenidos, se distribuyen en las tres fichas siguientes:

1. Variaciones y Permutaciones.
2. Combinaciones.
3. Binomio de Newton.

3.1. Ficha 1: Variaciones y Permutaciones.

Las variaciones y las permutaciones de objetos, son agrupaciones en las cuales hay algún criterio posicional que permite diferenciar, de forma esencial, a cada una de las posibles agrupaciones. Inicialmente, se puede considerar que tales agrupaciones están representadas en fila, o en línea recta, donde hay un primer elemento y un último.

La diferencia estriba en la participación de los objetos en dichas agrupaciones. Mientras que en las variaciones no se requiere que participen todos los objetos, en las permutaciones, participan todos. Se puede decir, que la permutación es un caso particular de variación

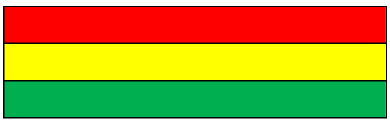
Variación sin repetición de n objetos tomados de k en k.

Una *variación sin repetición, de n objetos tomados de k en k*, es una agrupación alineada en recta (en fila), de k objetos elegidos entre los n disponibles, sin repetir ningún objeto.

Ejemplo: Se desean crear banderas tricolor de tres bandas horizontales y se dispone de seis rollos de tela con los siguientes colores:

Rojo	Amarillo	Marrón	Negro	Blanco	Verde

La bandera "RAV" es válida.



La bandera "RAN" es válida.

La bandera “RNA” es válida.

La bandera “RAR” no es válida, puesto que no es tricolor.

En este caso, resulta que en la agrupación de colores, es importante la posición de cada color en la bandera, se dispone de seis colores, y sólo se eligen tres para cada agrupación; entonces podemos decir, que cada bandera es una variación sin repetición, de seis colores tomados de tres en tres.

Observación. Las banderas presentadas han sido denominadas: RAN, RAV, RNA y RAR. Esta denominación indica cómo se situación de los colores, puesto que están en fila dentro de cada banderas. Se ha determinado que el color superior se corresponde con la primera letra y el más abajo la última.

Esta forma de denominar a las banderas, es personal, y no está definido en el problema, es una forma de expresar las agrupaciones como palabras que nos permite distinguir banderas, sin necesidad de verlas.

Con la simple escritura de la inicial de cada color, se puede analizar el problema, comprobando que el cambio de posición de una letra, modifica la bandera, y que no se puede repetir una misma letra.

Número de variaciones sin repetición de n objetos tomados de k en k.

El *número de variaciones sin repetición, de n objetos tomados de k en k* , es decir, el número de agrupaciones ordenadas, suele representarse por la expresión:

$$V_{n,k} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1).$$

Ejemplo: El número de variaciones sin repetición de seis elementos tomados de tres en tres es $V_{6,3} = 6 \times 5 \times 4 = 120$. Así pues, hay 120 banderas tricolor distintas, en el ejemplo anterior.

Ejemplo:

$$V_{7,4} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840.$$

$$V_{5,2} = 5 \times 4 = 20.$$

$$V_{6,1} = 6.$$

$$V_{6,5} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720.$$

Permutación sin repetición de n objetos.

Una *permutación sin repetición, de n objetos*, es una agrupación alineada recta (en fila), de todos objetos disponibles sin repetir ningún objeto. Una permutación de n elementos, es lo mismo, que una variación de n elementos, tomados de n en n.

Ejemplo: Se desean crear banderas tricolor, con tres bandas horizontales, y sólo se dispone, de tres rollos de tela con los siguientes colores:

Rojo	Amarillo	Negro

La bandera "RAN" es válida.

La bandera "RNA" " es válida.

La bandera "RAR" " no es válida, puesto que no es tricolor.

En este caso, resulta, que en la agrupación de colores es importante la posición de cada color en la bandera, y se emplean todos los colores para cada agrupación; entonces podemos decir, que cada bandera es una permutación sin repetición de tres colores.

Número de permutaciones sin repetición de n objetos.

El *número de permutaciones sin repetición, de n objetos*, es decir, el número de agrupaciones ordenadas, suele representarse por la expresión:

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

Ejemplo: El número de permutaciones sin repetición, de tres elementos es $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Así pues, hay 6 banderas tricolor distintas en el ejemplo anterior.

Ejemplo:

$$P_0 = 0! = 1.$$

$$P_1 = 1! = 1.$$

$$P_2 = 2! = 1 \times 2 = 2.$$

$$P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6.$$

$$P_4 = 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

$$P_5 = 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Observación. La expresión n!, se denomina n factorial, y se considera que 0!, toma el valor 1.

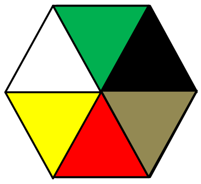
Permutación circular sin repetición de n objetos.

Una *permutación sin repetición, de n objetos*, es una agrupación en línea circular (en corro) de todos objetos disponibles, sin repetir ningún objeto.

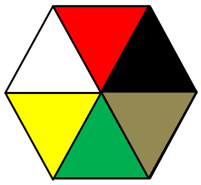
Ejemplo: Se desean crear hexágonos, tales que, cada uno de los seis triángulos con un lado y vértice opuesto el centro del hexágono, esté coloreado con un color distinto, y sólo se dispone de seis botes de pintura con los siguientes colores:

Rojo	Amarillo	Marrón	Negro	Blanco	Verde

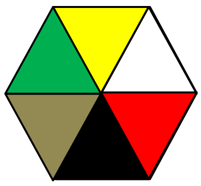
El hexágono "VNMRAB" es válido.



El hexágono "RNMVAB" " es válido y distinto del anterior.



El hexágono "ABRNMV" no es distinto del anterior, puesto que los colores vecinos a un determinado triángulo, son los mismos para cada hexágono



.Se puede comprobar la vecindad de los colores en la siguiente tabla

Triángulo de la izquierda	Triángulo de Color	Triángulo de la derecha

Observación. Las hexágonos han sido denominados: RNMVAB, RNMVAB y ABRNMV. Esta denominación, ha dispuesto los triángulos de colores en fila, tomando el triángulo superior como la primera letra, y rotando según las agujas de un reloj, los demás triángulos.

Esta forma de denominar a las hexágonos es personal, y no está definido en el problema, es una forma de expresar las agrupaciones como palabras que nos permite distinguir hexágonos, sin necesidad de verlos.

Con la simple escritura de la inicial de cada color se puede analizar el problema, comprobando, que el cambio de posición de una letra modifica el hexágono, y que no se puede repetir una misma letra.

El problema, es que esta notación no distingue seis “palabras” distintas que corresponden a un mismo hexágono. Esto se comprueba, al anotar como la primera letra, la inicial correspondiente a otro triángulo distinto del triángulo superior, y se procede de igual forma.

Número de permutaciones circulares sin repetición de n objetos.

El *número de permutaciones circulares sin repetición, de n objetos*, es decir, el número de agrupaciones ordenadas en corro, suele representarse por la expresión:

$$PC_n = P_{n-1} = (n-1)!$$

Ejemplo: El número de permutaciones circulares sin repetición seis elementos es $PC_6 = P_5 = 5! = 120$. Así pues, hay 120 hexágonos distintos, en el ejemplo anterior.

Observación. La relación existente entre el número de variaciones y el de permutaciones es:

$$V_{n,k} = \frac{P_n}{P_k} = \frac{n!}{k!}.$$

Variación con repetición de n objetos tomados de k en k.

Una *variación con repetición, de n objetos tomados de k en k*, es una agrupación alineada recta (en fila), de k objetos elegidos, entre los n disponibles. En este caso, se pueden repetir los objetos hasta k veces.

Ejemplo: Una ferretería, dispone de cinco cajones con dígitos en bronce, los correspondientes a lo dígitos impares:

1	3	5	7	9

Se trata, de crear unas muestras de rótulos numéricos de tres cifras, para numerar los portales de una calle.

Los siguientes rótulos son válidos:

153
513
717
177

En este caso, resulta que en la agrupación de dígitos, es importante la posición que ocupa cada dígito, se dispone de cinco elementos diferentes, y sólo se eligen tres, para cada agrupación; entonces podemos decir, que cada rótulo es una variación con repetición de cinco dígitos, tomados de tres en tres.

Número de variaciones con repetición de n objetos tomados de k en k.

El *número de variaciones con repetición, de n objetos tomados de k en k* , es decir, el número de agrupaciones ordenadas, suele representarse por la expresión:

$$VR_{n,k} = n \times n \times n \times \dots \times n = n^k.$$

Ejemplo: El número de variaciones con repetición, de cinco elementos, tomados de tres en tres es: $VR_{5,3} = 5^3 = 125$. Así pues, hay 125 rótulos distintos en el ejemplo anterior.

Permutación con repetición de n objetos

Una *permutación con repetición, de n objetos*, donde un objeto se repite k veces, es una colocación agrupada de todos objetos disponibles, teniendo en cuenta, que la permutación de posiciones del objeto repetido, no distingue agrupaciones.

Ejemplo: Se desean crear banderas agrupando seis bandas, de las cuales; tres son rojas, dos son amarillas, y una es negra.

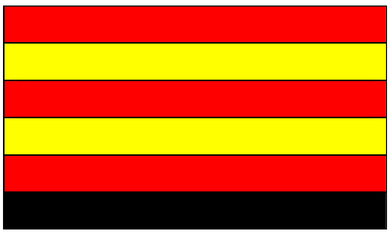
3 Bandas Rojas	2 Bandas Amarilla	1 Banda Negra

La bandera “RANRAR” es válida.

La bandera “RNRARA” es válida.

Si a la bandera “RNRARA”, le cambiamos la franja primera, por la quinta; entonces no se obtiene otra nueva bandera.

Si cambiamos la segunda, por la sexta, si se obtiene otra bandera.



En este caso, resulta, que en la agrupación de colores es importante la posición de cada color en la bandera, y se emplean todos los colores para cada agrupación; entonces podemos decir, que cada bandera, es una permutación con repetición, de seis colores, donde un color se repite tres veces, otro dos y el último una vez.

Número de permutación con repetición de n objetos

El *número de permutaciones con repetición, de n objetos* con sólo k objetos distintos, de manera, que cada uno se repite $n_1 \ldots n_k$ veces, es decir, $n_1 + \ldots + n_k = n$, suele representarse por la expresión:

$$P_{n,n_1 \ldots n_k} = \frac{P_n}{P_{n_1} \ldots P_{n_k}} = \frac{n!}{n_1! \ldots n_1!}.$$

Ejemplo: El número de permutaciones con repetición, de seis elementos tomados de tres en tres, de dos en dos y de uno en uno, es

$$P_{6,3,2,1} = \frac{P_6}{P_3 P_2 P_1} = \frac{6!}{3!\,2!} = 60.$$

Así pues, hay 60 banderas tricolor distintas, en el ejemplo anterior.

Ejercicios.

1. Los cinco componentes de una familia: (padre, madre, hijo mayor, hijo mediano e hijo menor); se sitúan en una misma fila de un cine. Si cada fila, tiene 25 butacas: ¿De cuántas formas distintas, puede estar la familia sentada en el cine?

2. Al salir del cine, la familia del ejercicio anterior se sienta en una mesa redonda, para cenar: ¿De cuántas formas distintas, puede estar la familia sentada en la cena?

3. Al volver a casa, cada uno se va a una de las cinco camas de la casa para dormir: ¿De cuántas formas distintas, pueden ocupar las camas para dormir?

4. Al despertar, y desayunar, cada componente ingiere un único líquido de los disponibles: té, café, leche y zumo: ¿Cuántos desayunos distintos se pueden producir?

5. Con las letras de la palabra PATATA: ¿Cuántas palabras distintas pueden escribirse? . Palabras que pudieran ser legibles, o no, con significado, o no.

Soluciones.

1. Cómo cada fila tiene 25 butacas, y hay que elegir una, para cada componente de la familia; entonces hay tantas colocaciones como variaciones de 25 elementos, tomados de cinco en cinco:
$$V_{25,5} = 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21 = 6375600.$$

2. Cómo cada mesa redonda tiene 5 asientos, y hay que elegir uno, para cada componente de la familia; entonces hay tantas colocaciones como permutaciones circulares de 5 elementos:
$$PC_5 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

3. Cómo la casa tiene 5 camas, y hay que elegir una, para cada componente de la familia; entonces hay tantas colocaciones como permutaciones circulares de 5 elementos
$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120.$$

4. Cómo hay cuatro bebidas disponibles, y hay que elegir una, para cada componente de la familia; entonces hay tantos desayunos como variaciones con repetición de 4 elementos, tomados de cinco en cinco
$$VR_{4,5} = 4^5 = 1024.$$

5. Hay, tantas palabras como permutaciones con repetición de 6 elementos, que se repiten de tres en tres, de dos en dos y de uno en uno.
$$P_{6,3,2,1} = \frac{P_6}{P_3 P_2 P_1} = \frac{6!}{3!\,2!} = 60.$$

3.2. Ficha 2: Combinaciones.

Las combinaciones de objetos, son agrupaciones de dichos objetos, en las cuales, no hay algún criterio posicional, y por lo tanto; dos combinaciones son distintas, sólo si son agrupaciones de diferentes objetos, es decir; los objetos, son los únicos elementos que permiten diferenciar de forma esencial a cada una de las posibles agrupaciones.

Combinación sin repetición de n objetos tomados de k en k.

Una *combinación sin repetición, de n objetos, tomados de k en k*, es una agrupación de k objetos, elegidos entre los n disponibles sin repetir ningún objeto.

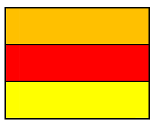
Ejemplo: Se desea crear distintas pinturas, mezclando cantidades iguales de tres de los colores disponibles, en seis botes con las siguientes pinturas:

Rojo	Amarillo	Marrón	Naranja	Blanco	Verde

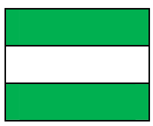
La pintura “RAV” es una de las posibles.

La pintura “RAN” es otra distinta de la anterior pintura.

La pintura “RNA” no es una pintura nueva, puesto que es igual a la pintura anterior “RAN”.



La pintura “VBV” no es una pintura válida, puesto que no se ha creado con tres colores distintos.



En este caso, resulta, que en la agrupación de colores es importante tan sólo, los colores empleados, y no como se vertieron para mezclar posteriormente. Así pues, se dispone de seis colores, y sólo se eligen tres para cada agrupación. Entonces podemos decir, que cada bote final, es una combinación sin repetición, de seis colores, tomados de tres en tres.

Observación. Las pinturas finales presentadas han sido denominadas: RAN, RAV, RNA y VBV. Con esta denominación, se indica el orden en el que se vierten los colores, pero si se cambia el orden de vertido de las pinturas, resulta que el color final es el mismo.

Esta forma de denominar a los botes de pintura final, es personal y no está definido en el problema, es una forma de expresar las agrupaciones como palabras, que nos permite distinguir colores finales, con la simple reseña de los colores participantes.

Con la simple escritura de la inicial de cada color, se puede analizar el problema. Comprobando que el cambio de posición de una letra no modifica el color final, y que no se puede repetir una misma letra.

Número de combinaciones sin repetición de n objetos tomados de k e k.

El *número de combinaciones sin repetición, de n objetos, tomados de k en k* , es decir, el número de agrupaciones de k elementos distintos, suele representarse por la expresión:

$$C_{n,k} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \ldots \times 2 \times 1}.$$

Ejemplo: El número de combinaciones sin repetición, de seis elementos, tomados de tres en tres, es: $C_{6,3} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$. Así pues, hay 120 pinturas finales distintas, en el ejemplo anterior.

Observación. La relación existente, entre el número de variaciones sin repetición, y el de combinaciones sin repetición es:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}.$$

Número combinatorio.

Se denomina *número combinatorio, n sobre k,* al número de combinaciones sin repetición, de n elementos tomados de k en k. Suele representarse por la expresión:

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}.$$

Ejemplo: El número de permutaciones sin repetición, de tres elementos, es: $P_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$. Así pues, hay 6 banderas tricolor distintas, en el ejemplo anterior.

Ejemplos:

$$\binom{0}{0} = 1.$$

$$\binom{3}{0} = 1.$$

$$\binom{4}{4} = 1.$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10.$$

$$\binom{7}{6} = 7.$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35.$$

Observación. Para que la expresión $\binom{n}{k}$ tenga sentido, se requiere que, $0 \leq k \leq n$, y se considera que $\binom{0}{0}$ toma el valor 1.

Combinación con repetición de n objetos tomados de k en k.

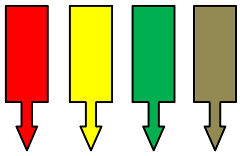
Una *variación con repetición, de n objetos, tomados de k en k*, es una agrupación de k objetos, elegidos entre los n disponibles, que pueden estar repetidos. En este caso se pueden repetir los objetos hasta k veces

Ejemplo: Una ferretería, dispone de cinco cajones, y cada cajón, contiene llaves de un mismo color; así pues, se tienen llaves de cinco colores distintos.

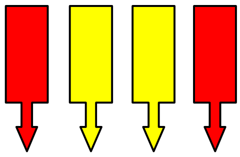
Rojo	Amarillo	Marrón	Naranja	Verde

Al ser solicitadas cuatro copias de la llave de un cliente, estas se fabrican con las seleccionadas de esos cajones. Se trata de estudiar los distintos juegos de llaves que podrían ser fabricadas.

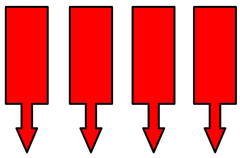
El juego "RAVM" es un posible juego.



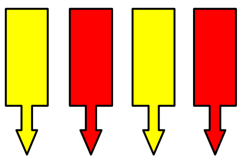
El juego "RAAR" es otro juego posible.



El juego "RRRR" es otro juego posible distinto.



Sin embargo, el juego "ARAR", es el mismo juego de llaves, que el "RAAR".



En este caso, sucede, que en la agrupación de colores, sólo es importante los colores empleados al fabricar las copias para el juego de llaves. Así pues, se dispone de cinco colores, y sólo se eligen un máximo de cuatro, para cada agrupación; entonces podemos decir, que cada juego es una combinación con repetición, de cinco colores tomados de cuatro en cuatro.

Observación. Las juegos de llaves presentados han sido denominadas: RAVM, RAAR, RRRR y ARAR. Con esta denominación, se indica el orden en la fabricación de cada copia del juego, pero si se cambia el orden de fabricación de copias, se obtiene el mismo juego de llaves, como en el caso RAAR y ARAR.

Esta forma de denominar a los juegos de llaves, es personal, y no está definida en el problema, es una forma de expresar los juegos con palabras que nos permite distinguir dichos juegos, con la simple reseña de los colores participantes.

Con la simple escritura de la inicial de cada color, se puede analizar el problema. Comprobando que el cambio de posición de una letra no modifica el color final, y que no se puede repetir una misma letra, desde cero veces a cuatro.

En este caso, resulta que en la agrupación de copias, no es importante la posición en la fabricación de la copia. Se dispone de cinco elementos diferentes, y cada uno, se puede repetir hasta cuatro veces en cada agrupación; entonces podemos decir, que cada juego de llaves es una combinación con repetición, hasta cuatro veces de cinco.

Número de combinación con repetición de n objetos tomados de k en k.

El *número de combinaciones con repetición, de n objetos, tomados de k en k*, es decir, el número de agrupaciones con posibles objetos repetidos, suele representarse por la expresión:

$$CR_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Ejemplo: El número de combinaciones con repetición, de cinco elementos, tomados de cuatro en cuatro, es: $CR_{5,4} = C_{8,4} = \binom{8}{4} = 70$. Así pues, hay juegos de llaves distintas, en el ejemplo anterior.

Ejercicios.

1. De un grupo de 30 personas, se seleccionan 10 para asistir en vivo a un programa de televisión: ¿Cuántas selecciones distintas se pueden efectuar?

2. Se disponen de trece elementos distintos, y se eligen sólo cinco: ¿Cuál es mayor, el número de variaciones de esos trece elementos, tomados de cinco en cinco, o el número de combinaciones de esos trece elementos, tomados de cinco en cinco?

3. En las 15 filas de un cine que tiene 25 butacas de color azul, se sustituirán cinco butacas de ese color, por otras cinco, de color verde en cada fila: ¿Cuántas filas distintas se pueden formar? , y, ¿cuántas apariencias distintas puede tener todo el conjunto de butacas del cine?

4. ¿Cuántas ternas de tres números enteros, no negativos, suman 10?

5. Un niño tiene nueve canicas; tres rojas, tres verdes y tres amarillas, en un bolsillo. Al meter la mano en el bolsillo, saca tres canicas: ¿De cuántas formas distintas pueden distribuirse los colores de las tres canicas?

Soluciones.

1. Cómo cada grupo de 10 personas, es diferente de otro, dependiendo sólo de los componentes, y no del orden en que fueron elegidos para formar el grupo, entonces hay tantos grupos, como combinaciones de 30 elementos, tomados de diez en diez:
$$C_{30,10} = \binom{30}{10} = \frac{30!}{10! \times 20!} = 90090.$$

2. El número de variaciones, puesto que para cada combinación, de trece elementos, tomados de cinco en cinco, se pueden obtener: $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ variaciones, de trece elementos, tomados de cinco en cinco.

3. Cómo cada fila de 25 butacas ve modificada sólo cinco butacas y no importa el orden en el cual se cambian los colores, entonces hay tantas formas de disponer una fila, como combinaciones, de 25 elementos, tomados de cinco en cinco.
$$C_{25,5} = \binom{25}{5} = \frac{25!}{5! \times 20!} = 53130.$$
Además, como el cine tiene 15 filas, y cada fila puede presentar 53130 apariencias distintas, resulta que las apariencias distintas de todo el cine son:
$$15 \times C_{25,5} = 15 \times \binom{25}{5} = 796950.$$

4. Cómo al sumar tres número, el orden de los sumandos no afecta al resultado, y además, pueden sumarse números repetidos, entonces hay tantas ternas que suman 10 como combinaciones con repetición, de 10 números, tomados de tres en tres
$$CR_{10,3} = \binom{3+10-1}{3} = \binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \times 9!} = 220.$$

5. Como hay tres colores, y al sacar tres canicas puede ocurrir que sean del mismo color, entonces hay tantas distribuciones de los colores de las tres canicas extraídas, como combinaciones, de tres elementos, tomados de tres en tres.
$$CR_{3,3} = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10.$$

3.3. Ficha 2: Binomio de Newton

En esta ficha se estudian, la relación entre la potencia entera positiva de un binomio, con las potencias de los elementos que componen dicho binomio.

Binomio.

Un *binomio*, es la suma, o resta, de elementos, o sumandos. En un binomio, estos sumandos no pueden ser sustituidos por un solo elemento

Ejemplos:

$$(1+x).$$

$$(a-b).$$

$$(2x^2-3y^3).$$

$$\left(\frac{1}{x}-3x\right).$$

Observación. La forma de operar con binomios, puede consultarse en las fichas de Aritmética. Como en esta ficha, sólo interesan las sucesivas potencias de un binomio, basta recordar la siguiente propiedad:

$$(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d.$$

Para simplificar la forma de escribir los productos de binomios se emplea la siguiente notación:

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Trinomio, tretanomio, … n-nomio.

Un *trinomio*, es la suma, o resta, de tres elementos, o sumandos. En un trinomio, estos elementos que no pueden ser sustituidos por un solo elemento. Análogamente, Un *n-nomio*, es la suma, o resta, de n elementos, o sumandos, tal que, esos elementos no pueden ser sustituidos por un solo elemento.

Ejemplos:

$$(1 + x + y).$$

$$(a - b + c).$$

$$(2x^2 - 3y^3 - 2z).$$

$$\left(\frac{1}{x} - 3x + 2x^2\right).$$

Observación. La forma de operar con n-nomios, es análoga a la forma de operar con binomios. Como en esta ficha, sólo interesan las sucesivas potencias de un n-nomio, basta recordar la siguiente propiedad:

$$(a + b + c)(d + e + f) = ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf.$$

Potencias de un binomio.

Se denomina *potencia n de un binomio,* al producto de n veces ese binomio, y suele representarse por la expresión:

$$(a + b)^n = (a + b)^{n-1}(a + b) = (a + b) \ldots^{(n)} \ldots (a + b).$$

Conviene recordar las primeras potencias de un binomio cualquiera, para lo cual mostramos la siguiente lista de potencias:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$(a + b)^4 = (a + b)^3(a + b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$(a + b)^5 = (a + b)^4(a + b) = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Observación. Se puede comprobar, la relación existente entre la potencia n de un binomio $(a + b)^n$, y todos los posibles productos de la forma: $a^p b^q$ con $p + q = n$. En el desarrollo de la potencia *n,* aparecen todos los productos $a^p b^q$, como sumandos.

Ejemplo: En el desarrollo de $(a + b)^7$, aparecen los siguientes productos de potencias de *a* y *b*, con el siguiente orden:

$$a^7, \quad a^6b\,, \quad a^5b^2, \quad a^4b^3, \quad a^3b^4, \quad a^2b^5, \quad ab^6, \quad b^7.$$

Triángulo de Tartaglia.

Se denomina *triángulo de Tartaglia* a la tabla de forma triangular compuesta por los coeficientes de las sucesivas potencias de un binomio:

Conviene recordar el triángulo, para las diez primeras potencias de un binomio cualquiera.

$$\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1
\end{array}$$

Cada fila del triángulo, está compuesta por los coeficientes que llevan, la lista de productos ordenada como anteriormente se ha mostrado.

Se puede comprobar la ley de formación del triángulo, observando que los coeficientes de una determinada fila, se construyen iniciando y finalizando la fila con el número 1, y rellenando los demás coeficientes, al sumar los de la fila anterior.

Observación. El triángulo de Tartaglia, es simétrico respecto a su altura, compuesta por la columna central.

Ejemplo: En el desarrollo de $(a+b)^7$, aparecen los siguientes productos de potencias de a y b, con los siguientes coeficientes:

$$a^7, a^6b\,, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7,$$

$$1, \quad 7\,, \quad 21, \quad 35, \quad 35, \quad 21, \quad 7, \quad 1.$$

Así pues:

$$(a+b)^7 = a^7 + 7\,a^6b + 21\,a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21\,a^2b^5 + 7ab^6 + \ b^7.$$

Triángulo de Tartaglia con números combinatorios.

Los coeficientes que aparecen en el triángulo, pueden ser descritos mediantes números combinatorios. Es claro, que dichos coeficientes, deben ser calculados aplicando la definición de número combinatorio.

Esta descripción del triángulo, nos permite la construcción de cualquiera de sus filas, sin necesidad de calcular las filas anteriores.

El triángulo, expresado con número combinatorios, para las diez primeras potencias de un binomio cualquiera es:

$$\begin{array}{c}
\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}\\
\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}\\
\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}\\
\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}\\
\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}\\
\binom{6}{0}\ \binom{6}{1}\ \binom{6}{2}\ \binom{6}{3}\ \binom{6}{4}\ \binom{6}{5}\ \binom{6}{6}\\
\binom{7}{0}\ \binom{7}{1}\ \binom{7}{2}\ \binom{7}{3}\ \binom{7}{4}\ \binom{7}{5}\ \binom{7}{6}\ \binom{7}{7}\\
\binom{8}{0}\ \binom{8}{1}\ \binom{8}{2}\ \binom{8}{3}\ \binom{8}{4}\ \binom{8}{5}\ \binom{8}{6}\ \binom{8}{7}\ \binom{8}{8}\\
\binom{9}{0}\ \binom{9}{1}\ \binom{9}{2}\ \binom{9}{3}\ \binom{9}{4}\ \binom{9}{5}\ \binom{9}{6}\ \binom{9}{7}\ \binom{9}{8}\ \binom{9}{9}\\
\binom{10}{0}\ \binom{10}{1}\ \binom{10}{2}\ \binom{10}{3}\ \binom{10}{4}\ \binom{10}{5}\ \binom{10}{6}\ \binom{10}{7}\ \binom{10}{8}\ \binom{10}{9}\ \binom{10}{10}
\end{array}$$

Ejemplo: Los coeficientes del desarrollo de $(a+b)^{12}$, son:

$$\binom{12}{0},\binom{12}{1},\binom{12}{2},\binom{12}{3},\binom{12}{4},\binom{12}{5},\binom{12}{6},\binom{12}{7},\binom{12}{8},\binom{12}{9},\binom{12}{10},\binom{12}{11},\binom{12}{12}.$$

Algunas propiedades de los números combinatorios.

Al comparar las dos formas de expresar el triángulo de Tartaglia, se puede comprobar, las siguientes propiedades elementales de los números combinatorios:

$$\binom{n}{0} = 1.$$

$$\binom{n}{1} = n.$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

$$\binom{n}{n-1} = n.$$

$$\binom{n}{n} = 1.$$

La cuarta propiedad, se corresponde con la forma de construir una fila del triángulo, una vez conocida la anterior, mientras que la tercera, se corresponde con la simetría del triángulo, respecto a su columna central.

Fórmula de Newton del desarrollo de la potencia de un binomio.

La *fórmula de Newton de un binomio*, es el desarrollo en sumandos de la potencia de ese binomio, es decir, con todos los productos de potencias y sus coeficientes respectivos en forma de número combinatorio.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-2} a^2b^{n-2} + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

Ejemplo: La potencia séptima del binomio $(a+b)$, se desarrolla según la fórmula, de la forma siguiente:

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0} a^7 + \binom{7}{1} a^6 b + \binom{7}{2} a^5 b^2 + \binom{7}{3} a^4 b^3 + \binom{7}{4} a^3 b^4 + \binom{7}{5} a^3 b^5 + \binom{7}{6} ab^6 + \binom{7}{7} b^7.$$

Al calcular los valores de los números combinatorios, se tiene que

$$(a+b)^7 = a^7 + 7\,a^6 b + 21\,a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21\,a^2 b^5 + 7ab^6 + \,b^7.$$

Observación. El desarrollo de la potencia *n* de un binomio $(a+b)$, tiene *n+1* términos, o sumandos, tal que cada uno de esos sumandos tiene la misma expresión. Así pues, basta describir la expresión del término *k+1* del desarrollo:

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Se suele utilizar una notación reducida para describir la fórmula del binomio, empleando el símbolo sumatorio;

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Observación. El desarrollo de la potencia *n,* de un binomio $(a-b)$, tiene sus *n+1* términos que alternativamente suman y restan, empezando por la suma. Por ejemplo, en el caso de ser *n* un número impar, se tiene la expresión:

$$(a-b)^n = \binom{n}{0} a^n - \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 - \cdots - \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} - \binom{n}{n} b^n.$$

Ejemplo: La potencia séptima del binomio $(a+b)$, se desarrolla según la fórmula de la forma siguiente:

$$(a+b)^7 = \binom{7}{0} a^7 - \binom{7}{1} a^6 b + \binom{7}{2} a^5 b^2 - \binom{7}{3} a^4 b^3 + \binom{7}{4} a^3 b^4 - \binom{7}{5} a^3 b^5 + \binom{7}{6} ab^6 - \binom{7}{7} b^7.$$

Al calcular los valores de los números combinatorios, se tiene que:

$$(a+b)^7 = a^7 - 7\,a^6 b + 21\,a^5 b^2 - 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 - 21\,a^2 b^5 + 7ab^6 - \,b^7.$$

Ejercicios.

1. Determinar el polinomio que se obtiene, al multiplicar cuatro veces el mismo monomio *(x-1)*.

2. Determinar el término sexto del desarrollo del binomio $(x^2+3)^{13}$.

3. Calcular el valor de la suma siguiente:

$$\binom{7}{0}+\binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}+\binom{7}{7}.$$

4. Calcular el valor de las sumas siguientes:

$$\binom{9}{4}+\binom{9}{5}.$$

$$\binom{10}{4}+\binom{10}{5}.$$

5. Estudiar, sí en el desarrollo del binomio $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{12}$, existe algún término, tal que, la *x* quede elevada al exponente 6.

Soluciones.

1. $(x-1)^4 = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1.$

   Basta observar que:

$$\begin{aligned}(x-1)^4 &= (x+(-1))^4 \\ &= \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3(-1) + \binom{4}{2}x^2(-1)^2 + \binom{4}{3}x(-1)^3 \\ &+ \binom{4}{4}(-1)^4 = \binom{4}{0}x^4 - \binom{4}{1}x^3 + \binom{4}{2}x^2 - \binom{4}{3}x + \binom{4}{4}.\end{aligned}$$

2. El término sexto es: $\binom{13}{5}\,(x^2)^8 3^5 = \frac{13\times12\times11\times10\times9}{1\times2\times3\times4\times5}x^{16}243 = 312471x^{16}.$

3. 128, puesto que esos sumandos, son el desarrollo del binomio $(1+1)^7 = 2^7$.

$$(1+1)^7 = \binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \binom{7}{2} + \binom{7}{3} + \binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}.$$

4.

$$\binom{9}{4} + \binom{9}{5} = 2\binom{9}{4} = 2\,\frac{9\times8\times7\times6}{1\times2\times3\times4} = 441.$$

$$\binom{10}{4} + \binom{10}{5} = \binom{11}{5} = \frac{11\times10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4\times5} = 462.$$

5. El término séptimo, puesto que cualquier término *k+1,* del desarrollo del binomio $\left(x^2+\frac{3}{x}\right)^{12}$ es de la forma:

$$\binom{12}{k}\,(x^2)^{12-k}\left(\frac{3}{x}\right)^k = \binom{12}{k}3^k\frac{x^{24-2k}}{x^k} = \binom{12}{k}3^k x^{24-3k}.$$

$$x^{24-3k} = x^6 \Rightarrow 24-3k = 6 \Rightarrow k = 6.$$