Integrales

Prof. Esther Gil Cid

Departamento de Matemática Aplicada I

ETSI Industriales

Índice general

1. Introducción y objetivos

Las integrales permiten calcular el área de figuras planas. Este problema surgió en tiempos remotos: los griegos llegaron a fórmulas para encontrar el área de polígonos, del círculo o de segmentos de parábolas. Pero el método que empleaban se basaba en aproximar la figura cuya área se quería calcular por polígonos de áreas conocidas. A partir de este principio, en el s. XVII, Newton y Leibnitz introdujeron el concepto de integral definida de una función f en un intervalo.

Los contenidos de este tema son necesarios para el primer curso de cualquier Ingeniería o carrera de ciencias.

Las integrales están muy relacionadas con las derivadas, ya que la integración es la operación recíproca de la derivación, si trabajamos con integrales indefinidas.

Objetivos

- Poder resolver integrales inmediatas.
- Detectar qué técnica hay que aplicar para integrar una función.
- Poder resolver integrales sencillas no inmediatas.
- Entender el significado geométrico de la integral definida.
- Poder calcular algunas áreas mediante integrales.

2. Prueba de autodiagnóstico

Haga el test siguiente para evaluar el nivel de conocimientos que tiene en este tema.

Una primitiva de $f(x) = 3x^2$ es $x^3 + 3$	**Verdadero**	**Falso**
Se cumple que $\int 2x \cos^2 x dx = 2 \int x dx \int \cos^2 x dx$	**Verdadero**	**Falso**
Una primitiva de $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx$ es $\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x$	**Verdadero**	**Falso**
$\int \sqrt[4]{(x+1)^7} dx = \frac{7}{4} \sqrt[4]{(x+1)^{11}} + k$	**Verdadero**	**Falso**
$\int (4x^3 + 3)(x^4 + 3x)^5 dx = \frac{1}{6} (x^4 + 3x)^6 + k$	**Verdadero**	**Falso**
Al integrar por partes, es indiferente cómo se eligan las partes	**Verdadero**	**Falso**
La integral $\int \frac{1}{1 + (x+4)^2} dx$ se resuelve mediante el cambio de variable $t = (x+4)^2$	**Verdadero**	**Falso**
La integral de $\int 3 \frac{x+1}{x^2 + x - 2} dx$ es la suma $\int \frac{1}{x+2} dx + \int \frac{2}{x-1} dx$	**Verdadero**	**Falso**
La integral definida no está relacionada con la integral indefinida	**Verdadero**	**Falso**
$\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = 3$	**Verdadero**	**Falso**

Si ha tenido muchas dificultades y el número de respuestas correctas no le parece aceptable, debe hacer de forma ordenada todas las fichas que encontrará a continuación.

Si sólo ha tenido dificultades en algunos casos, localice las fichas correspondientes y repáselas. Si ha respondido todo correctamente puede pasar a otro bloque.

3. Contenidos

3.1. Ficha 1: Primitiva de una función

Integrar

Integrar es la operación inversa de derivar, del mismo modo que obtener la raíz cuadrada es la operación inversa a elevar al cuadrado.

Dada una función f (derivada), integrar consiste en calcular una función F que al derivarla produce f.

Primitiva

Si f es una función definida en el intervalo (a, b) y existe una función F que verifica

$$F'(x) = f(x),$$

F se llama **primitiva** o **integral indefinida** de f

Notación

Para referirnos a la integral de f se utiliza la siguiente notación

$$\int f(x)\, dx,$$

donde $f(x)$ es el integrando, x es la variable de integración y dx indica respecto a qué variable se integra.

Exist. primitiva

Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, también lo es $F(x) + k$, para cualquier constante $k \in \mathbb{R}$, porque sus derivadas coinciden y son $f(x)$. Por este motivo, al calcular la integral indefinida vamos a añadir una constante k. Por eso, podemos decir que la primitiva, en realidad, es un conjunto de funciones

$$\int f(x)\, dx = \{F : F' = f\}.$$

Ejemplo 1. La función $f(x) = \cos x$ tiene una primitiva que es $F(x) = \operatorname{sen} x$, porque la derivada de la función $\operatorname{sen} x$ es el $\cos x$.

Ejemplo 2. Las funciones $F(x) = 2x^3 + 2$ y $G(x) = 2x^3 - 6$ son primitivas de $f(x) = 6x^2$, porque

$$F'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} + 0 = 6x^2,$$
$$G'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} - 0 = 6x^2.$$

Tabla de primitivas

Una primera tabla de funciones y sus primitivas la obtenemos a partir de las derivadas:

$\int a dx = ax + k$	$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + k,\ a \neq -1$
$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$	$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k$
$\int \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) dx = \operatorname{tg} x + k$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + k$
$\int e^x dx = e^x + k$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k \quad x > 0$
$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + k$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + k$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + k$

Ejemplo 3. $\int \left(x^4 + 3x^2 - 2\sqrt{x}\right) dx$ se calcula en los siguientes pasos:

1. Como es una suma, se aplica la aditividad y homogeneidad para tener

$$\begin{aligned}\int \left(x^4 + 3x^2 - 2\sqrt{x}\right) dx &= \int x^4 dx + \int 3x^2 dx - \int 2\sqrt{x} dx \\ &= \int x^4 dx + 3\int x^2 dx - 2\int \sqrt{x} dx.\end{aligned}$$

2. Cada una de las integrales anteriores se resuelve con la regla anterior:

$$\begin{aligned}\int x^4 dx &= \frac{1}{5}x^5 + k_1, \\ 3\int x^2 dx &= \frac{3}{3}x^3 + k_2 = x^3 + k_2, \\ 2\int \sqrt{x} dx &= 2\int x^{1/2} dx = 2\frac{1}{1/2}x^{3/2+1} + k_3 = \frac{4}{3}x^{3/2} + k_3.\end{aligned}$$

3. Al escribir la integral, es suficiente sumar una única constante

$$\int \left(x^4 + 3x^2 - 2\sqrt{x}\right) dx = \frac{1}{5}x^5 + x^3 - \frac{4}{3}x^{3/2} + k.$$

Propiedades de la integral

Si $f(x)$ es una función y c es una constante, entonces se verifican las siguientes propiedades:

Homogeneidad Homogeneidad

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx.$$

Aditividad Aditividad

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Ejemplo 4. Para calcular la integral de $f(x) = 8\cos x + 2$:

1. Aplicamos las propiedad de aditividad y homogeneidad, porque así

$$\begin{aligned}\int (8\cos x + 2)\,dx &= \int 8\cos x dx + \int 2dx \\ &= 8\int \cos x dx + 2\int dx.\end{aligned}$$

2. La integral de $\cos x$ es $\operatorname{sen} x$, como vimos en el ejemplo 1.
3. La integral de 1 es x, lo que se comprueba observando que la derivada de x es 1.
4. Así, para $k \in \mathbb{R}$, tenemos

$$\int (8\cos x + 2)\,dx = 8\int \cos x dx + 2\int dx = 8\operatorname{sen} x + 2x + k.$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 1. Comprobar que $F(x) = \ln(\cos(x + \pi/4)) - 3$ y $G(x) = \ln(\cos(x + \pi/4)) + 2$, para $x \in (0, \pi/4)$ son primitivas de $f(x) = -\operatorname{tg}(x + \pi/4)$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 2. Calcular $\int e^{73x} dx$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 3. Encontrar la primitiva $F(x)$ de $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ que verifica que $F(0) = 2$.

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 1.

Como $F(x) = G(x) - 5$, sus derivadas van a coincidir.

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{\cos(x+\pi/4)}(\cos(x+\pi/4))' = -\frac{\text{sen }(x+\pi/4)}{\cos(x+\pi/4)} \\ &= -tg(x+\pi/4) = f(x). \end{aligned}$$

Esto significa que

$$\int f(x)\,dx = F(x), \int f(x)\,dx = G(x).$$

Solución del ejercicio 2.

Esta integral se resuelve teniendo en cuenta que la derivada de $e^{cx} = ce^{cx}$. Utilizando las propiedades de las integrales, podemos escribir

$$\int e^{73x}dx = \frac{1}{73}\int 73e^{73x}dx = \frac{1}{73}e^{73x} + k.$$

Solución del ejercicio 3.

Primero tenemos que buscar una primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Sabemos que ésta es la derivada del arcotangente, por lo que es una integral inmediata:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + k.$$

De todas las posibles primitivas, tenemos que elegir aquella que hace

$$\operatorname{arctg} 0 + k = 2 \Longleftrightarrow 0 + k = 2 \Longrightarrow k = 2.$$

Entonces, ya tenemos $F(x) = \operatorname{arctg} x + 2$.

3.2. Ficha 2: Integrales inmediatas

Integral inmmediata

Un primer paso para la integración es detectar las integrales inmediatas o que se transforman en inmediatas con manipulaciones sencillas del integrando.

Inv. regla cadena

Si en el integrando aparecen $g'(f(x))\,f'(x)$, entonces la primitiva es $g(f(x))$:

$$\int g'(f(x))\,f'(x)\,dx = g(f(x)) + k.$$

Esta regla es la "inversa" de la regla de la cadena.

Ejemplo 5. Para calcular $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx$:

1. Observamos que aparece $\operatorname{sen} x$ elevado al cuadrado, multiplicado por $\cos x$, que es la derivada del seno. Podemos aplicar la regla anterior.
2. Una primitiva de una potencia de grado 2 de "algo" es $\frac{1}{2+1}$ multiplicado por "algo" elevado a $2+1$.
3. Así, la integral de $\operatorname{sen}^2 x \cos x$ es $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + k$.
4. Se puede comprobar derivando esta función:

$$\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + k\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3\operatorname{sen}^{3-1} x \cos x + 0 = \operatorname{sen}^2 x \cos x.$$

Ejemplo 6. Una integral integral inmediata típica es la del logaritmo neperiano: cuando el integrando es un cociente y el numerador es la derivada del denominador. Por ejemplo, para calcular $\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx$ observamos:

1. En el denominador aparece x^2+x-3 y en el numerador $2x+1$, que es su derivada.
2. La derivada de $\ln f(x)$ es $\frac{1}{f(x)}f'(x)$, aplicando la regla de la cadena.
3. Esto es precisamente lo que tenemos aquí, por lo que
$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-3}dx = \ln\left|x^2+x-3\right| + k.$$
4. Se ponen las barras de valor absoluto, para evitar problemas de definición del ln (sólo está definido para argumento mayor que 0) y porque las derivadas de $\ln(x)$ y $\ln(-x)$ coinciden.

   Como ejercicio queda comprobar que la integral está bien hecha.

Int. cuasi-inmediata A menudo tenemos que resolver integrales de este tipo que no son completamente inmediatas, pero lo son con sencillas manipulaciones previas.

Ejemplo 7. Podemos calcular

$$\text{a. } \int \frac{x}{x^2+4}dx, \qquad \text{b. } \int \frac{x^2}{x^2+1}dx, \qquad \text{c. } \int \frac{1}{x^2+4}dx.$$

con esta técnica. Son 3 integrales aparentemente similares, pero que se manipulan de forma distinta.

a. Para integrar $\int \frac{x}{x^2+4}dx$, vemos que el numerador no es la derivada del denominador, pero "casi". Para que lo fuera, debería aparecer $2x$.

1. Multiplicamos por 2 el numerador, pero para que no cambie la fracción, debemos dividir también por 2

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4}dx.$$

2. Por homogeneidad, "sacamos" $\frac{1}{2}$ del integrando

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx.$$

3. Ya tenemos una fracción donde el numerador es la derivada del denominador y, por tanto, la integral es

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+4| + k.$$

b. En este caso, no vamos a poder transformar el numerador para que sea la derivada del denominador, porque tendríamos que dividir entre x, que no podemos "sacar" fuera de la integral. Pero si el integrando fuera $\dfrac{1}{x^2+1}$, tendríamos un arctg.

1. Si sumamos y restamos 1 en el numerador y operamos, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx &= \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx \\ &= \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx.\end{aligned}$$

2. Aplicando la aditividad, resulta

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx.$$

3. Integramos y obtenemos

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = x - \operatorname{arctg} x + k.$$

c. En esta integral, si el denominador fuera $t^2 + 1$, sería un arctg. Lo transformamos de la siguiente manera:

1. Tenemos que conseguir que el denominador sea “algo”+1, para lo que sacamos factor común al 4

$$\int \frac{1}{x^2+4}dx = \int \frac{1}{4}\frac{1}{\frac{x^2}{4}+1}dx = \int \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx.$$

2. Para que sea la derivada del arctg de una función $f(x) = \frac{x}{2}$, nos falta la derivada de f en el numerador, que es $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx &= \int \frac{1}{4}2\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx \\ &= \int \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx.\end{aligned}$$

3. Teniendo en cuenta la homogeneidad, resulta

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+4}dx &= \int \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+k.\end{aligned}$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} dx$, b. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)}$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 5. Calcular las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3x+2} - \frac{2x+1}{x^2+x-3} \right) dx$,

b. $\displaystyle\int \left(\frac{4}{3x-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \right) dx$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 6. Calcular las siguientes integrales:

a. $\int \dfrac{x}{\sqrt{1-(x^2+5)^2}} dx$, b. $\int (3x+1)\, e^{3x^2} e^{2x} e^{-1} dx$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 7. Calcular las siguientes integrales:

a. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$, b. $\displaystyle\int \frac{x^3+3x-1}{x^2+1} dx$.

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 4.

a. Para resolver esta integral, observamos que el numerador es la integral del radicando ("lo de dentro de la raíz"), que está en el denominador. Como la integral de

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + k,$$

entonces esta integral es cuasi-inmediata:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}} dx = 2\sqrt{\operatorname{sen} x} + k.$$

b. Si en el numerador no apareciera $(x+1)$ sino $\left(1+x^2\right)$, la derivada podría ser una arcotangente. Como, además, podemos escribir la integral como:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} = \int \frac{1}{x+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx,$$

entonces esta integral es cuasi-inmediata, porque $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ es la derivada de $\sqrt{x}$ y entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)} &= 2 \int \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \\ &= 2 \int \frac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1} \left(\sqrt{x}\right)' dx = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + k. \end{aligned}$$

Solución del ejercicio 5.

a. Para resolver esta integral:

1. Primero tenemos en cuenta la aditividad

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{3x+2} - \frac{2x+1}{x^2+x-3} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{3x+2} dx - \int \frac{2x+1}{x^2+x-3} dx. \end{aligned}$$

2. La primera integral es inmediata porque es un logaritmo neperiano

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{3x+2} dx &= \int \frac{1}{3} \, \frac{3}{3x+2} dx \\ &= \int \frac{1}{3} \ln |3x+2| + k_1. \end{aligned}$$

3. La segunda integral también es un logaritmo neperiano, ya que el numerador es la derivada del denominador

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+x-3} dx &= \int \frac{\left(x^2+x-3\right)'}{x^2+x-3} dx \\ &= \ln \left| x^2+x-3 \right| + k_2. \end{aligned}$$

4. Así, resulta

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{3x+2} - \frac{2x+1}{x^2+x-3} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \ln |3x+2| - \ln \left| x^2+x-3 \right| + k. \end{aligned}$$

b. Es muy similar a la integral anterior, pero hay que realizar algunas manipulaciones:

1. Aplicamos aditividad y queda:

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{4}{3x-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \right) dx \\ &= \int \frac{4}{3x-1} dx + \int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx. \end{aligned}$$

2. La primera integral es cuasi-inmediata, ya que

$$\int \frac{4}{3x-1}dx = \frac{4}{3}\int \frac{3}{3x-1}dx = \frac{4}{3}\ln|3x-1| + k_1.$$

3. En la segunda integral, el numerador es la derivada del radicando. Parace lógico manipular esta expresión hasta que quede una integral inmediata

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+5}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+5\right)'}{\sqrt{x^2+5}}dx \\ &= \frac{1}{2}\int 2\left(\sqrt{x^2+5}\right)'\left(x^2+5\right)' dx \\ &= \sqrt{x^2+5} + k_2.\end{aligned}$$

4. Entonces

$$\begin{aligned}I &= \int \left(\frac{4}{3x-1} + \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\right) dx \\ &= \frac{4}{3}\ln|3x-1| + \sqrt{x^2+5} + k.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 6.

a. Esta integral es un arcoseno, porque en el denominador la raíz de $1+\left(x^2+5\right)^2$ y en el numerador lo que se puede transformar en la derivada de x^2+5. Es cuasi-inmediata. Primero, tenemos que conseguir que en el numerador esté la derivada de x^2+5, que es $2x$. Hacemos:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+\left(x^2+5\right)^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1+\left(x^2+5\right)^2}}dx.$$

Esta integral es ya inmediata, porque en el numerador está la derivada de x^2+5

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+\left(x^2+5\right)^2}}dx = \frac{1}{2}\text{arcsen}\left(x^2+5\right)+k.$$

b. Podemos escribir

$$e^{3x^2}e^{2x}e^{-1} = e^{3x^2+2x-1}.$$

Entonces, nos damos cuenta de que $3x+1$ es casi la derivada del exponente, porque

$$\left(3x^2+2x-1\right)' = (6x+2) = 2\,(3x+1)\,.$$

Por eso, esta integral es cuasi-inmediata:

$$\begin{aligned}\int (3x+1)\,e^{3x^2}e^{2x}e^{-1}dx &= \int (3x+1)\,e^{3x^2+2x-1}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \left(3x^2+2x-1\right)' e^{3x^2+2x-1}dx \\ &= \frac{1}{2}e^{3x^2+2x-1}+k \\ &= \frac{1}{2}e^{3x^2}e^{2x}e^{-1}+k.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 7.

a. La primera integral se puede transformar un la integral de un arcotangente, mediante manipulaciones del denominador

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx &= \int \frac{1}{x^2+2x+1+1}dx \\ &= \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx \\ &= \text{arctg}\,(x+1)+k.\end{aligned}$$

b. Para resolver esta integral, primero dividimos x^3+3x-1 entre x^2+1

$$\begin{aligned}\frac{x^3+3x-1}{x^2+1} &= \frac{x^3+x+2x-1}{x^2+1} = \frac{x\left(x^2+1\right)+2x-1}{x^2+1} \\ &= \frac{x\left(x^2+1\right)}{x^2+1} + \frac{2x-1}{x^2+1} = x + \frac{2x-1}{x^2+1}.\end{aligned}$$

Entonces, la integral queda

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+3x-1}{x^2+1}dx &= \int \left(x+\frac{2x-1}{x^2+1}\right)dx \\ &= \int xdx + \int \frac{2x-1}{x^2+1}dx \\ &= \int xdx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx.\end{aligned}$$

1. La primera integral es inmediata

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + k_1.$$

2. La segunda integral es un logaritmo neperiano, porque en el numerador aparece la derivada del denominador

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln\left|x^2+1\right| + k_2.$$

3. La tercera derivada es un arcotangente

$$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \operatorname{arctg} x + k_3.$$

4. Así:

$$\int \frac{x^3+3x-1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}x^2 + \ln\left|x^2+1\right| - \operatorname{arctg} x + k.$$

3.3. Ficha 3: Algunos métodos de integración

La mayoría de las veces las integrales no son inmediatas. Por eso, para integrar función se siguen distintos procedimientos, según cómo sea el integrando.

Int. por partes Se suele aplicar cuando el integrando es un producto de funciones y la integral de uno de ellos es inmediata.

- Es la aplicación a la integración de la regla de la derivada de un producto

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

- Para aplicar este método, se identifican dos partes en la integral: a una la llamaremos u' y a la otra v', que es la derivada de una función v. u y v son funciones que dependen de una variable x.
- u y v' deben tomarse de tal manera que sea muy fácil derivar u y muy fácil integrar la parte v'.
- Se basa en la siguiente fórmula

$$\int uv'dx = uv - \int u'vdx.$$

donde u y v son funciones de x.
- Normalmente, no elegimos las partes (u y v') de forma que se simplifique la integral, ésta "no sale", porque se puede complicar. Por eso, es importante elegirlas para que sea fácil derivar u e integrar v'.

Ejemplo 8. Para resolver la integral $I = \int xe^x dx$, observamos:

1. Si elegimos $u = x$, al derivarla nos va a quedar $u' = 1dx$.
2. Entonces, debe ser $v'dx = e^x dx$ y tenemos $v = e^x$.
3. Así
$$I = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx.$$
4. La última integral es inmediata y resulta
$$I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + k.$$

Cambio de variable En algunos casos, la integral sería inmediata si la variable adoptara una forma más simple.

- Es la aplicación a integrales de la regla de la cadena de la derivación
$$(g(f))'(x) = (g)'(f(x))(f)'(x)$$
introduciendo una nueva variable, $t = (f(x))$
- Para reducir una integral a este caso, se hace un cambio de variable $t = f(x)$.
- Entonces $dt = f'(x)\, dx$ y se sustituyen esta expresión y la variable x por t.
- Al final del proceso hay que deshacer el cambio de variable para que el resultado quede como función de x.

Ejemplo 9. La integral $I = \int (3x-1)^{20}\, dx$ se puede resolver desarrollando la potencia e integrando el polinomio resultante. Sin embargo, es más sencillo hacer un cambio de variable:

1. Si dentro del paréntesis apareciera t, la integral sería inmediata. Por eso, elegimos $t = 3x - 1$.
2. Entonces, $(3x-1)^{20} = t^{20}$ y $dt = 3 \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dt$.
3. La integral queda
$$I = \int (3x-1)^{20}\, dx = \int t^{20} \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3} \frac{1}{21} t^{21} + k = \frac{1}{63} t^{21} + k.$$
4. Finalmente, hay que deshacer el cambio de variable, resultando
$$I = \frac{1}{63} (3x-1)^{21} + k.$$

Ejemplo 10. La integral $I = \int \left(\sqrt{2x+1} + \frac{1}{e^x + e^{-x}} \right) dx$ se resuelve aplicando cambios de variable a cada uno de los sumandos:

1. En primer lugar, se separa la integral en dos integrales:
$$I = \int \sqrt{2x+1}\, dx + \int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx = I_1 + I_2.$$

2. Si en I_1, dentro de la raíz, tuviéramos x, sería muy sencillo. Por eso, intentamos el cambio $t = 2x+1$, $dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sqrt{2x+1}dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{t}dt \\ &= \frac{1}{2}\frac{2}{3}t^{3/2} + k_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}^3 + k_1. \end{aligned}$$

Si hubiéramos hecho $t^2 = 2x+1$, $2tdt = 2dx \Rightarrow dx = tdt$, tendríamos el mismo resultado

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sqrt{2x+1}dx = \int t \cdot tdt = \int t^2 dt \\ &= \frac{1}{3}t^3 + k_1 = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}^3 + k_1. \end{aligned}$$

3. Observamos que en el denominador de I_2 aparecen e^x y e^{-x}. Por eso, si hacemos el cambio $t = e^x$, entonces $e^{-x} = t^{-1}$ y como $dt = e^x dx = tdx$, resulta $dx = \dfrac{1}{t}dt$ y la integral queda

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx = \int \frac{1}{t + t^{-1}}\frac{1}{t}dt \\ &= \int \frac{1}{t^2+1}dt = \operatorname{arctg} t + k_2 = \operatorname{arctg} e^x + k_2. \end{aligned}$$

4. Sumando ambas integrales, resulta

$$I = \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}^3 + \operatorname{arctg} e^x + k.$$

Int. expr. racionales Se trata de resolver integrales del tipo

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y el grado de $p(x)$ es menor que el de $q(x)$.

- Si el grado de $p(x)$ no fuera menor que el de $q(x)$, se dividen, resultando

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \int P(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx,$$

donde ahora sí es menor el grado de $r(x)$ que el de $q(x)$.

- En este curso, sólo vamos a considerar polinomios $q(x)$ de grado 2 y con raíces distintas.
- Para grado mayor de $q(x)$ el procedimiento es similar, si no tiene raíces múltiples.

Caso 1 $\int \frac{1}{ax+b} dx.$

Esta integral es un logaritmo neperiano:

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \int \frac{a}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + k.$$

Caso 2 $\int \frac{1}{x^2+ax+b} dx,$ donde $x^2 + ax + b$ no tiene raíces reales.

Operando de forma adecuada con el denominador (“completando cuadrados”) se reduce a una expresión del tipo

$$c \int \frac{1}{(dx+e)^2 + 1} dx,$$

que es casi inmediata

$$c\int \frac{1}{(dx+e)^2+1}dx = \frac{c}{d}\int \frac{d}{(dx+e)^2+1}dx$$
$$= \frac{c}{d}\operatorname{arctg}(dx+e)+k.$$

Los números c, d y e se han elegido de forma adecuada.

$\boxed{\text{Caso 3}}$ $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+ax+b}dx$, donde x^2+ax+b no tiene raíces reales.

Se puede completar el denominador para reducirla a 2 integrales: un ln y un arctg

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x}{x^2+ax+b}dx = \int \frac{x+\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}{x^2+ax+b}dx \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+a}{x^2+ax+b}dx - \frac{a}{2}\int \frac{1}{x^2+ax+b}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+ax+b\right| - \frac{c}{d}\operatorname{arctg}(dx+e)+k, \end{aligned}$$

donde c, d y e se han elegido de forma adecuada.

$\boxed{\text{Caso 4}}$ $\displaystyle\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}dx$, donde r_1 y r_2 son las raíces de x^2+cx+d.

Se factoriza el polinomio $x^2+cx+d=(x-r_1)(x-r_2)$. Entonces se puede escribir:

$$\begin{aligned} \int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}dx &= \int \frac{ax+b}{(x-r_1)(x-r_2)}dx \\ &= \int \frac{A}{x-r_1}dx + \int \frac{B}{x-r_2}dx. \end{aligned}$$

Las constantes A y B se encuentran desarrollando la suma de fracciones, igualando los coeficientes de la misma potencia de x y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante.

Podemos resolver las integrales anteriores utilizando el Caso 1.

Ejemplo 11. La integral $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+13}dx$ se resuelve operando con el denominador, porque no tiene raíces reales:

1. Tenemos que “completar cuadrados” y conseguir que en el denominador aparezca $(x+r)^2+s$. Para ello, suponemos que 6 es $2\cdot r$ y operamos con 13 para que aparezca como suma de dos términos y uno de ellos sea r^2:

$$\begin{aligned} x^2-6x+13 &= x^2-2\cdot 3x+9+4 \\ &= x^2-2\cdot 3x+3^2+4 \\ &= (x-3)^2+4. \end{aligned}$$

2. Operamos para tener $(dx+e)^2+1$ en el denominador

$$\begin{aligned} x^2-3x+13 &= (x-3)^2+4 \\ &= 4\left(\frac{1}{4}(x-3)^2+1\right) \\ &= 4\left(\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)^2+1\right). \end{aligned}$$

3. Entonces

$$\begin{aligned}
\int I = \frac{1}{x^2-3x+13}dx &= \int \frac{1}{4\left(\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)^2+1\right)}dx \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{4}2\int \frac{1/2}{\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)^2+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ejemplo 12. Resolvamos la integral

$$\int \frac{x^2+2x}{x^2-1}dx.$$

1. Como el grado de numerador es mayor que el grado del denominador, primero tenemos qeu dividir ambos polinomios:

$$\frac{x^2+2x}{x^2-1} = \frac{x^2-1+2x+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2x+1}{x^2-1}.$$

2. Como las raíces de x^2-1 son 1 y -1, podemos factorizar el denominador

$$x^2-1 = (x-1)(x+1).$$

3. Ahora tenemos que buscar A y B para que

$$
\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x^2-1} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A\,(x+1) + B\,(x-1)}{(x-1)\,(x+1)} \\
&= \frac{Ax + A + Bx - B}{(x-1)\,(x+1)} = \frac{(A+B)\,x + (A-B)}{(x-1)\,(x+1)} \\
&\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B=2 \\ A-B=1 \end{array} \right. \Longrightarrow A = \frac{3}{2} \qquad B = \frac{1}{2} \\
&\Longrightarrow \frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{3}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}.
\end{aligned}
$$

4. La integral es

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2+2x}{x^2-1} dx &= \int dx + \int \frac{3}{2}\frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} dx \\
&= x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} dx \\
&= x + \frac{3}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x+1| + k.
\end{aligned}
$$

Int. expr. trigon. En casi todas las integrales con expresiones trigonométricas (no inmediatas) es útil probar el cambio de variable

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2\operatorname{arctg} t \Longrightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\
&\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},
\end{aligned}
$$

que transforma la integral en la integral de una función racional.

- Pero las integrales de $\operatorname{sen}^n x \cos^m x$ se resuelven según sean n y m par o impar:
  - Si n y m son pares, se utilizan las siguientes identidades, deducidas a partir de las expresiones del coseno del ángulo doble:
$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$
  - Si $n = 2k+1$ es impar, se hace
$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx = \int \operatorname{sen}^{2k+1} x \cos^m x dx \\ &= \int \operatorname{sen}^{2k} x \operatorname{sen} x \cos^m x dx \\ &= \int \left(1-\cos^2 x\right)^k \operatorname{sen} x \cos^m x dx. \end{aligned}$$
  - Si $m = 2k+1$ es impar, se hace
$$\begin{aligned} I &= \int \operatorname{sen}^n x \cos^m x dx = \int \operatorname{sen}^n x \cos^{2k+1} x dx \\ &= \int \operatorname{sen}^n x \cos^{2k} x \cos x dx = \int \operatorname{sen}^n x \left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)^k \cos x dx. \end{aligned}$$

Ejemplo 13. La integral
$$I = \int \left(\operatorname{sen}^3 x + \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x\right) dx$$

1. Se puede escribir como la suma de dos integrales:
$$I = \int \operatorname{sen}^3 x dx + \int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x dx = I_1 + I_2.$$

2. I_1 es impar en seno, por lo que hacemos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \operatorname{sen}^3 x dx = \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x dx \\ &= \int \left(1-\cos^2 x\right) \operatorname{sen} x dx = \int \left(\operatorname{sen} x - \cos^2 x \operatorname{sen} x\right) dx \\ &= \int \operatorname{sen} x dx - \int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + K. \end{aligned}$$

3. Como I_2 es par en coseno, hacemos

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \cos^2 x \operatorname{sen}^2 x dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right) dx. \end{aligned}$$

De nuevo tenemos una integral par en coseno, y como $\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2 2x\right) dx = \frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{8}\left(\int dx - \int \cos 4x dx\right) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + K'. \end{aligned}$$

4. La integral I es

$$I = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + k.$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 8. Resolver, por partes, las siguiente integrales:
a. $\int x^2 e^x dx,$ b. $\int \frac{\text{sen}^2 x}{e^{2x}} dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 9. Resolver las siguientes integrales aplicando un cambio de variable adecuado:

a. $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\text{sen}\, x}} dx,$ b. $\int x\sqrt{(x+1)^3} dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 10. Resolver las siguientes integrales racionales:

a. $\int \frac{7}{(x-2)(x+5)} dx,$ b. $\int \frac{x^2}{x^2 - x + 1} dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 11. Resolver las siguientes integrales trigonométricas:
a. $\int \cos^3 x dx,$ b. $\int \cos^4 x dx.$

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 8.

a. Lo lógico parece ser tomar x^2 y e^x como funciones. Al derivar x^2 decrece el grado y la derivada de e^x es esta misma función: por eso, tomamos

$$\begin{array}{l} u = x^2, \;\; u'dx = 2xdx, \\ v = e^x, \;\; v'dx = e^x dx. \end{array}$$

Como

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx,$$

entonces la integral es:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx = x^2 e^x - 2\int xe^x dx.$$

De nuevo, tenemos que aplicar integración por partes a la última integral, con

$$\begin{array}{l} u = x, \quad\; u'dx = dx, \\ v = e^x, \;\; v'dx = e^x dx, \end{array}$$

quedando

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + k,$$

y la integral que buscamos es

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + k.$$

b. Antes de empezar, y para simplificar, podemos escribir

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right).$$

Además, como $\dfrac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$, hacemos:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\operatorname{sen}^2 x}{e^{2x}} dx &= \frac{1}{2} \int e^{-2x} \left(1 - \cos 2x\right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx - \frac{1}{2} \int e^{-2x} \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x} - \frac{1}{2} \int e^{-2x} \cos 2x dx + k \\
&= -\frac{1}{4} e^{-2x} - \frac{1}{2} \int e^{-2x} \cos 2x dx + k.
\end{aligned}
$$

Para resolver esta integral, elegimos las siguientes partes:

$$
\begin{aligned}
u &= \cos 2x, \quad u' dx = -2 \operatorname{sen} 2x dx, \\
v &= -\frac{1}{2} e^{-2x}, \qquad v' dx = e^{-2x} dx.
\end{aligned}
$$

y la integral es:

$$
\begin{aligned}
\int e^{-2x} \cos 2x dx &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \cos 2x - \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) \left(-2 \operatorname{sen} 2x\right) dx \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2x} \cos 2x - \int e^{-2x} \operatorname{sen} 2x dx.
\end{aligned}
$$

Tenemos que integrar de nuevo con partes, tomando

$$
\begin{aligned}
u &= \operatorname{sen} 2x, \quad u' dx = 2 \cos 2x dx, \\
v &= -\frac{1}{2} e^{-2x}, \qquad v' dx = e^{-2x} dx.
\end{aligned}
$$

y resulta

$$
\begin{aligned}
\int e^{-2x} \operatorname{sen} 2x dx &= -\frac{1}{2} e^{-2x} \operatorname{sen} 2x - \int \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\right) 2 \cos 2x dx \\
&= -\frac{1}{2} e^{-2x} \operatorname{sen} 2x + \int e^{-2x} \cos 2x dx.
\end{aligned}
$$

Así:

$$\int e^{-2x}\cos 2x dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x - \int e^{-2x}\text{sen}\, 2x dx$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-2x}\text{sen}\, 2x - \int e^{-2x}\cos 2x dx.$$

Despejando la integral, resulta:

$$\int e^{-2x}\cos 2x dx + \int e^{-2x}\cos 2x dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\cos 2x + \frac{1}{2}e^{-2x}\text{sen}\, 2x$$
$$\Longrightarrow \int e^{-2x}\cos 2x dx = \frac{1}{4}\left(e^{-2x}\text{sen}\, 2x - e^{-2x}\cos 2x\right),$$

y tenemos ya la integral que buscamos

$$\int \frac{\text{sen}^2 x}{e^{2x}}dx = -\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}\int e^{-2x}\cos 2x dx + k$$
$$= -\frac{1}{4}e^{-2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\left(e^{-2x}\text{sen}\, 2x - e^{-2x}\cos 2x\right) + k$$
$$= \frac{1}{8}e^{-2x}\left(\cos 2x - \text{sen}\, 2x - 2\right) + k.$$

Solución del ejercicio 9.
a. Hacemos el cambio

$$\text{sen}\, x = t, \qquad \cos x dx = dt \qquad \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - t^2.$$

Entonces

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\text{sen}\, x}}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt{\text{sen}\, x}}\cos x dx = \int \frac{1-t^2}{\sqrt{t}}dt = \int \left(\frac{1}{\sqrt{t}} - t^{2-\frac{1}{2}}\right)dt$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{t}}dt - \int t^{\frac{3}{2}}dt = 2\sqrt{t} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + k = 2\sqrt{t} - \frac{2}{5}\sqrt{t^5} + k$$
$$= 2\sqrt{\text{sen}\, x} - \frac{2}{5}\sqrt{\text{sen}^5 x} + k.$$

b. Con el cambio

$$x+1=t \qquad x=t-1 \qquad dx=dt,$$

la integral se transforma en

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{(x+1)^3}dx &= \int (t-1)\sqrt{t^3}dt = \int t\sqrt{t^3}dt - \int \sqrt{t^3}dt \\ &= \int tt^{\frac{3}{2}}dt - \int t^{\frac{3}{2}}dt = \int t^{\frac{5}{2}}dt - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + k \\ &= \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + k = \frac{2}{7}(x+1)^{\frac{7}{2}} - \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} + k.\end{aligned}$$

Solución del ejercicio 10.

a. Como las soluciones del polinomio del denominador son 2 y -5, tenemos que escribir la función racional como

$$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5}.$$

Entonces, hacemos

$$\begin{aligned}\frac{7}{(x-2)(x+5)} &= \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+5} \\ &= \frac{A(x+5)}{(x-2)(x+5)}+\frac{B(x-2)}{(x-2)(x+5)} \\ &= \frac{Ax+5A+Bx-2B}{(x-2)(x+5)} = \frac{(A+B)x+(5A-2B)}{(x-2)(x+5)}.\end{aligned}$$

Para que se verifique esto, debe ser

$$\begin{aligned}A+B&=0,\\ 5A-2B&=7.\end{aligned}$$

La solución de este sistema es $A = 1$ y $B = -1$. Por tanto, la integral se transforma en

$$\begin{aligned}
\int \frac{7}{(x-2)(x+5)} dx &= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+5} \right) dx \\
&= \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+5} dx \\
&= \ln|x-2| - \ln|x+5| + k = \ln \frac{|x-2|}{|x+5|} + k
\end{aligned}$$

b. Para resolver una integral racional, debe ser el grado del polinomio del numerador menor que el del denominador. Lo primero es, pues, dividir

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x^2-x+1} &= 1 + \frac{x-1}{x^2-x+1} \\
&= 1 + \frac{x}{x^2-x+1} - \frac{1}{x^2-x+1}.
\end{aligned}$$

Así, la integral se puede escribir como

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{x^2}{x^2-x+1} dx = \int \left(1 + \frac{x-1}{x^2-x+1} \right) dx \\
&= \int dx + \int \frac{x-1}{x^2-x+1} dx \\
&= x + \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-x+1} dx + k \\
&= x + \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx + k \\
&= x + \frac{1}{2} \ln|x^2-x+1| - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-x+1} dx + k.
\end{aligned}$$

La última integral se resuelve completando cuadrados para transformarla en la integral de un arcotangente

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1} dx \\
&= \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \int \frac{4}{3} \frac{1}{\frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1} dx \\
&= \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx \\
&= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

La integral es:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x^2}{x^2 - x + 1} dx \\
&= x + \frac{1}{2} \ln\left|x^2 - x + 1\right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right) + k.
\end{aligned}
$$

Solución del ejercicio 11.

a. Como $\cos x$ está elevado a un número impar, hacemos:

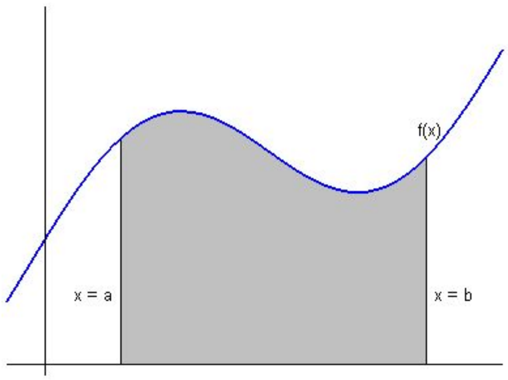
$$
\begin{aligned}
I &= \int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx \\
&= \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right) \cos x dx \\
&= \int \cos x dx - \int \operatorname{sen}^2 x \cos x dx = \operatorname{sen} x - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 x + k.
\end{aligned}
$$

b. Como x está elevado a un número par, hacemos:

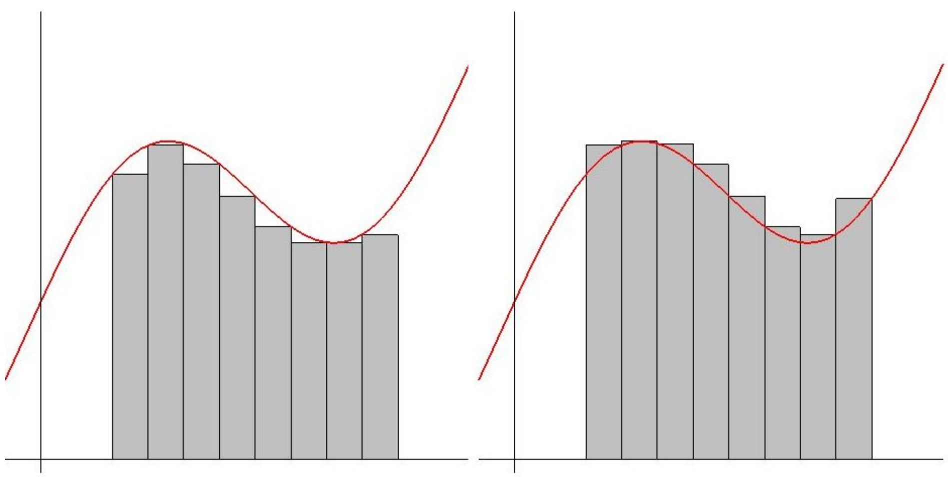
$$
\begin{aligned}
I &= \int \cos^4 x dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1+\cos^2 2x + 2\cos 2x\right) dx \\
&= \frac{1}{4}\left(\int dx + \int \cos^2 2x dx + \int 2\cos 2x dx\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(x + \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx + \operatorname{sen} 2x\right) + k \\
&= \frac{1}{4}\left(x + \int \frac{1}{2} dx + \int \frac{1}{2}\cos 4x dx + \operatorname{sen} 2x\right) + k \\
&= \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x\right) + k \\
&= \frac{1}{8}\left(3x + 2\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right) + k.
\end{aligned}
$$

3.4. Ficha 4: Integrales definidas

Integral definida El problema planteado es calcular el área comprendido entre la gráfica de una función $f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.



- Una aproximación a este área se puede obtener dividiendo el área en rectángulos (por debajo o por encima de la gráfica de $f(x)$), de base cada vez menor, calculando el área de cada uno de ellos y sumando todas las áreas.



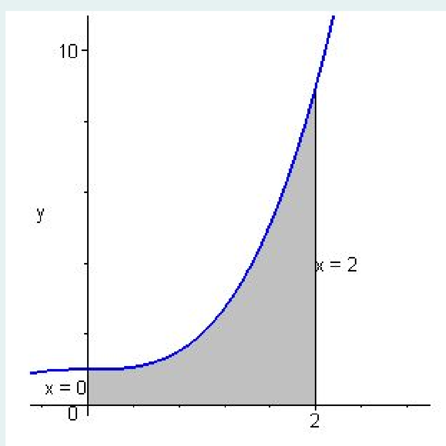
- La integral definida es el área de la región delimitada por $f(x)$ entre a y b y el eje OX. Se representa como

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Lím. integración

La diferencia formal obvia entre las integrales definidas e indefinidas es que tienen "**límites de integración**", que no son más que los números indicados a la derecha del símbolo de integración "arriba" y "abajo". Aunque están muy relacionadas entre ellas, la principal diferencia es que el resultado de una integral definida es un número y el de una integral definida es un conjunto de funciones, cuya derivada es el integrando.

Ejemplo 14. $\int_0^2 \left(x^3+1\right) dx$ es el área que queda entre el trazo de la función $f(x) = x^3+1$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=2$.



Es el área indicada en la figura en gris.

$\boxed{\text{T. Fund. Cálculo}}$ Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$. Entonces

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \text{ es derivable,}$$
$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Se llama Teorema Fundamental del Cálculo porque nos asegura que existe una primitiva F de una función continua f y porque nos permite trabajar con ella, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15. La derivada segunda de la función

$$F(x) = \int_0^x e^t \operatorname{sen}^2 t\, dt$$

se puede calcular según el Teorema anterior:

$$F'(x) = e^x \operatorname{sen}^2 x,$$

$$F''(x) = e^x \operatorname{sen}^2 x + 2e^x \operatorname{sen} x \cos x.$$

$\boxed{\text{Regla de Barrow}}$ Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$

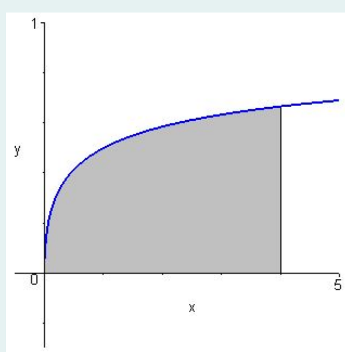
$F(x)|_a^b$ es una forma de escribir $F(b) - F(a)$.

Nota: Cuando se resuelve la integral por cambio de variable, *no hay que olvidarse de deshacer el cambio antes de sustituir la x por los límites de integración.* Este procedimiento se sigue si se integra por partes. Otra posibilidad es cambiar los límites de integración de acuerdo con el cambio de variable, pero puede resultar más complicado.

Ejemplo 16. Podemos calcular el área representada en el Ejemplo 14 a partir de la integral de x^3+1, por la regla de Barrow:

$$\int_0^2 \left(x^3+1\right) dx = \left.\frac{1}{4}x^4 + x\right|_0^2$$
$$= \frac{1}{4}2^4 + 2 - \left(\frac{1}{4}0^4 + 0\right) = 4 + 2 = 6.$$

Ejemplo 17. Calculemos el área de la región delimitada por $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ entre 0 y 4 y el eje OX.



1. Hay que resolver la integral $\int_0^4 \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} dx$.

2. Hacemos el cambio de variable $\sqrt{x} = t$, $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = dt$ y:

$$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}dx = \int_0^2 \frac{t}{t+2}2tdt.$$

   Con este cambio, $x_0 = 0$ se convierte en $t_0 = 0$ y $x_1 = 4$ se convierte en $t_1 = 2$.

3. Resolvemos la integral

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 \frac{t}{t+2}2tdt = 2\int_0^2 \frac{t^2}{t+2}dt \\
&= 2\int_0^2 \left(t-2+\frac{4}{t+2}\right)dt = 2\int_0^2 tdt - 4\int_0^2 dt + 8\int_0^2 \frac{1}{t+2}dt \\
&= 2\left.\frac{1}{2}t^2\right|_0^2 - 4\left.t\right|_0^2 + 8\left.\ln|t+2|\right|_0^2 \\
&= 4-8+8(\ln 4 - \ln 2) = -4+8\ln 2.
\end{aligned}$$

4. Podíamos haber resuelto la integral, deshecho el cambio de variable y haber obtenido los valores entre los límites de integración:

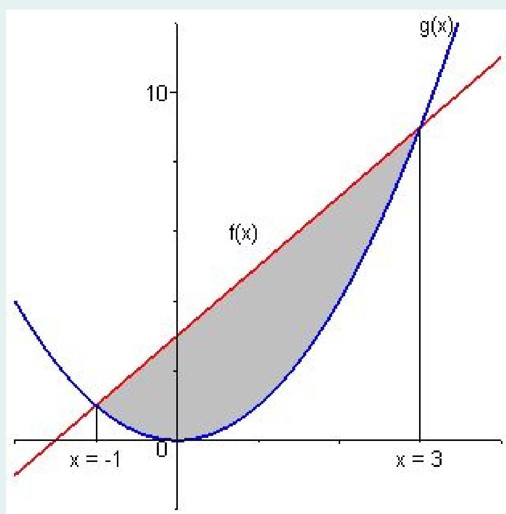
$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}dx = \int \frac{t}{t+2}2tdt &= t^2 - 4t + 8\ln|t+2| \\
&= x - 4\sqrt{x} + 8\ln\left|\sqrt{x}+2\right| \\
&\Longrightarrow \int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}dx = x - 4\sqrt{x} + 8\ln\left|\sqrt{x}+2\right|\Big|_0^4 \\
&= -4+8\ln 2.
\end{aligned}$$

Ejemplo 18. Podemos calcular el área de regiones delimitadas por gráficas de varias funciones con la integral indefinida. Como ejemplo, calcularemos el área de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2$.

1. Primero tenemos que calcular los puntos de corte:

$$
\begin{aligned}
f(x) = g(x) &\iff 2x + 3 = x^2 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \\
&\iff x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, -1 y 3 serán los límites de integración:



2. Como $f(x) \geq g(x)$ en $[-1,3]$, entonces el área pedida es

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{3} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-1}^{3} \left(2x + 3 - x^2\right) dx \\
&= x^2 + 3x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{3} \\
&= 3^2 + 3 \cdot 3 - \frac{1}{3}3^3 - \left((-1)^2 + 3(-1) - \frac{1}{3}(-1)^3\right) \\
&= 9 + 9 - 9 - \left(1 - 3 + \frac{1}{3}\right) \\
&= 9 + \frac{5}{3} = \frac{32}{3}.
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos

Ejercicio 12. Calcular las siguientes integrales definidas:

a. $\int_0^1 4x^2 dx$, b.$\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1} dx$,

c.$\int_0^1 \operatorname{sen} x \cos x dx$, d. $\int_0^2 xe^x dx$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 13. Calcular las siguientes integrales definidas, haciendo un cambio de variable:

a.$\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$, b.$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6} dx$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 14. Calcular las siguientes integrales definidas, integrando por partes:

a. $\int_1^e x \ln x dx$, b. $\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 15. Calcular el área delimitada por el eje OX, la gráfica de $\frac{2x}{x^2-1}$ y las rectas $x=2$ y $x=3$.

Pulse aquí para ver la solución.

Ejercicio 16. Calcular el área de la región delimitada por gráficas de $2x^3$ y $2x$.

Pulse aquí para ver la solución.

Si ha tenido dificultades para resolver estos ejercicios correctamente, vuelva a repasar esta ficha.

Solución a los ejercicios propuestos

Solución del ejercicio 12.

a. Se resuelve la integral y se tienen en cuenta los límites de integración:

$$\int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3}x^3\bigg|_0^1 = \frac{4}{3}\left(1^3 - 0^3\right) = \frac{4}{3}.$$

b. Esta integral es un logaritmo neperiano

$$\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx = \ln\left|x^2-1\right|\Big|_2^3 = \ln\left(3^2-1\right) - \ln\left(2^2-1\right)$$
$$= \ln 8 - \ln 3 = \ln\frac{8}{3}.$$

c. La integral es inmediata, resultado

$$\int_0^1 \operatorname{sen} x \cos x dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 1 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 0$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 1.$$

d. Por el primer ejemplo de la fiche 3, sabemos que

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + k.$$

Entonces

$$\int_0^2 xe^x dx = xe^x - e^x\big|_0^2 = 2e^2 - e^2 - \left(0e^0 - e^0\right)$$
$$= e^2 + 1.$$

Obsérvese que no hemos considerado la constante k de la integral indefinida porque no es necesario, al ser una integral definida.

Solución del ejercicio 13.

a. Hacemos el cambio:

$$e^x = t, \qquad e^x dx = dt, \qquad dx = e^{-x} dt = \frac{1}{t} dt.$$

Resulta

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x+1}{e^x-1} dx &= \int \frac{t+1}{t-1}\frac{1}{t} dt = \int \frac{1}{t-1} dt + \int \frac{1}{t\,(t-1)} dt \\
&= \ln|t-1| + \int \frac{1}{t-1} dt - \int \frac{1}{t} dt \\
&= \ln|t-1| + \ln|t-1| - \ln|t| + k \\
&= 2\ln|t-1| - \ln|t| + k \\
&= 2\ln|e^x-1| - \ln|e^x| + k.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta los límites de integración, la integral definida es:

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{e^x+1}{e^x-1} dx &= 2\ln|e^x-1| - \ln|e^x|\Big|_1^2 \\
&= 2\ln\left|e^2-1\right| - \ln\left|e^2\right| - \left(2\ln\left|e^1-1\right| - \ln\left|e^1\right|\right) \\
&= 2\ln\left(\frac{e^2-1}{e-1}\right) - \ln\frac{e^2}{e} \\
&= 2\ln(e+1) - \ln e \\
&= 2\ln(e+1) - 1.
\end{aligned}$$

b. Parece apropiado el cambio

$$x^3 = t, \qquad 3x^2 dx = dt.$$

Resulta

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{1+x^6} dx &= \int \frac{1}{3}\frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t + k \\
&= \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + k.
\end{aligned}$$

Considerando los límites de integración:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 1^3 - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} 0^3$$
$$= \frac{1}{3}\frac{\pi}{4} - 0 = \frac{1}{12}\pi.$$

Solución del ejercicio 14.

a. Tomamos:

$$u = \ln x, \quad u' = \frac{1}{x},$$
$$v = \frac{1}{2}x^2, \quad v' = x.$$

Entonces:

$$\int_1^e x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x\bigg|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx$$
$$= \frac{1}{2}e^2 \ln e - \frac{1}{2}1^2 \ln 1 - \frac{1}{2}\int_1^e xdx$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{2}x^2\bigg|_1^e$$
$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}.$$

b. En este caso, elegimos:

$$u = \cos x, \quad u' = -\operatorname{sen} x,$$
$$v = e^x, \quad v' = e^x.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx &= e^x \cos x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \left(-\operatorname{sen} x\right) dx \\ &= e^{\pi/2} \cos \frac{\pi}{2} - e^0 \cos 0 + \int_0^{\pi/2} e^x \operatorname{sen} x dx \\ &= -1 + \int_0^{\pi/2} e^x \operatorname{sen} x dx.\end{aligned}$$

Para resolver esta integral, integramos de nuevo por partes, con:

$$\begin{array}{ll} u = \operatorname{sen} x, & u' = \cos x, \\ v = e^x, & v' = e^x. \end{array}$$

y tenemos

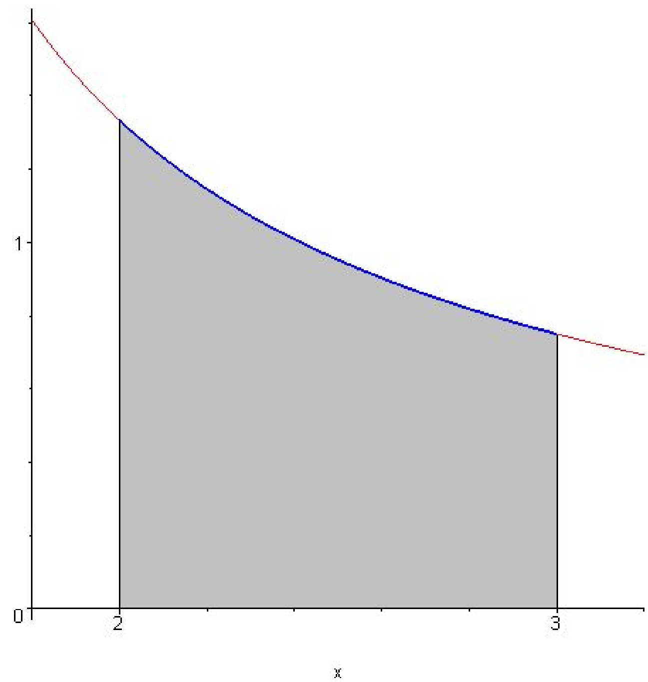
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = -1 + \int_0^{\pi/2} e^x \operatorname{sen} x dx \\ &= -1 + e^x \operatorname{sen} x|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx \\ &= -1 + e^{\pi/2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} - e^0 \operatorname{sen} 0 - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx \\ &= -1 + e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx.\end{aligned}$$

Como la integral aparece a los dos lados de la igualdad, podemos despejar:

$$\int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx + \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = -1 + e^{\pi/2}$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = \frac{1}{2} \left(e^{\pi/2} - 1\right).$$

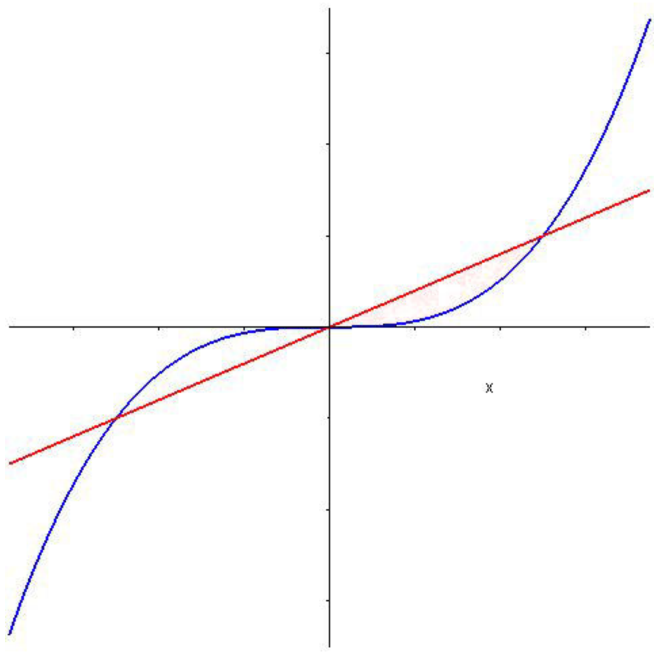
Solución del ejercicio 15.
Hemos representado la situación en la siguiente figura



Entonces, observamos que tenemos que resolver la integral:

$$\int_2^3 \frac{2x}{x^2-1}dx = \ln\left(x^2-1\right)\Big|_2^3 = \ln\left(3^2-1\right) - \ln\left(2^2-1\right)$$
$$= \ln 8 - \ln 3 = \ln\frac{8}{3}.$$

Solución del ejercicio 16.
Las funciones se cortan en $x=0$, $x=-1$ y $x=1$ (ver figura).



Por tanto, se pide encontrar:

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \left(2x - 2x^3\right) dx = 2\int_0^1 \left(x - x^3\right) dx \\
&= 2\left.\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x^4\right|_0^1 = \frac{2}{3}1^2 - 1^4 - \left(\frac{2}{3}0^2 - 0^4\right) \\
&= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

4. Prueba de autoevaluación

Realice la siguiente prueba para ver si ha asimilado correctamente los contenidos de este módulo.

La primitiva de una función es única	**Verdadero**	**Falso**
La única primitiva de $\dfrac{1}{1+x^2}$ es $\operatorname{arctg} x$	**Verdadero**	**Falso**
$\int \left(\dfrac{3}{1+x^3} + 2\cos^2 x \operatorname{sen} x \right) dx = 3\int \dfrac{1}{1+x^3}dx + 2\int \cos^2 x \operatorname{sen} x dx$	**Verdadero**	**Falso**
Se verifica $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \frac{\ln^4 x}{4}$	**Verdadero**	**Falso**
Una primitiva de $\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$ es $\dfrac{1}{2}(\operatorname{arcsen} x)^2 + 2$	**Verdadero**	**Falso**
Aplicando integración por partes, $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cos x) + k$	**Verdadero**	**Falso**
$\displaystyle\int \frac{2^x}{1+4^x}dx = \tfrac{1}{2}\log_2 e \operatorname{arctg} 2^x + k$	**Verdadero**	**Falso**
Sólo se pueden resolver integrales de funciones racionales donde el grado del numerador es menor que el del denominador	**Verdadero**	**Falso**
$\int \dfrac{1}{x^2-x+1}dx$ es un logaritmo neperiano	**Verdadero**	**Falso**
Para resolver la integral $\int \cos^4 x \operatorname{sen}^2 x dx$ se tienen en cuenta las razones del ángulo doble	**Verdadero**	**Falso**

Bibliografía

[1] Alonso Tosca, J.I.; Novo Sanjurjo, V.; 1988. Cálculo de Primitivas. Cuadernos de la Uned. Madrid: Libro donde se describen todas las técnicas de integración, con gran cantidad de ejemplos y ejercicios.

[2] Ballvé, M. E.; Delgado, M.; Porto, A. M.; Ulecia, T.: Problemas de Matemáticas especiales. 2.a ed. Editorial Sanz y Torres: Libro de ejercicios correspondiente al libro de "Matemáticas especiales". Muchos ejercicios resueltos.

[3] Bujalance, E.; Bujalance, J. A.; Costa, A.; Fernández, V.; Fernández, J.; Jiménez, P.; María, J. L. de; Martínez, E.: Matemáticas especiales. 2.a ed. Editorial Sanz y Torres: Libro para el acceso a la Universidad para mayores de 25 años, donde no se requiere base matemática previa. Ejemplos resueltos y ejercicios propuestos no resueltos.

[4] http://w3.cnice.mec.es/Descartes/index.html. Páginas elaboradas dentro del Proyecto Descartes, desarrollado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes. Es una herramienta capaz de generar materiales interactivos con la que se han construido más de cien unidades didácticas de los distintos cursos de la enseñanza secundaria, accesibles a través de esta página.

[5] Hernández Morales, V.; Ramon Méndez, E.; Vélez Ibarrola, R.; Yáñez de Diego, I.; 2002. Introducción a las Matemáticas. Ediciones Académicas. Madrid: En este libro están explicadas de forma clara las derivadas, en el Capítulo 7. Se acompaña de numerosos ejemplos y ejercicios.

[6] http://personales.unican.es/gonzaleof/. Página web con 4 cursos de Matemáticas (Primero y Segundo de Bachillerato, Ciencias y Sociales). Material de exposición clara, con numerosos ejemplos y ejercicios.

Índice alfabético